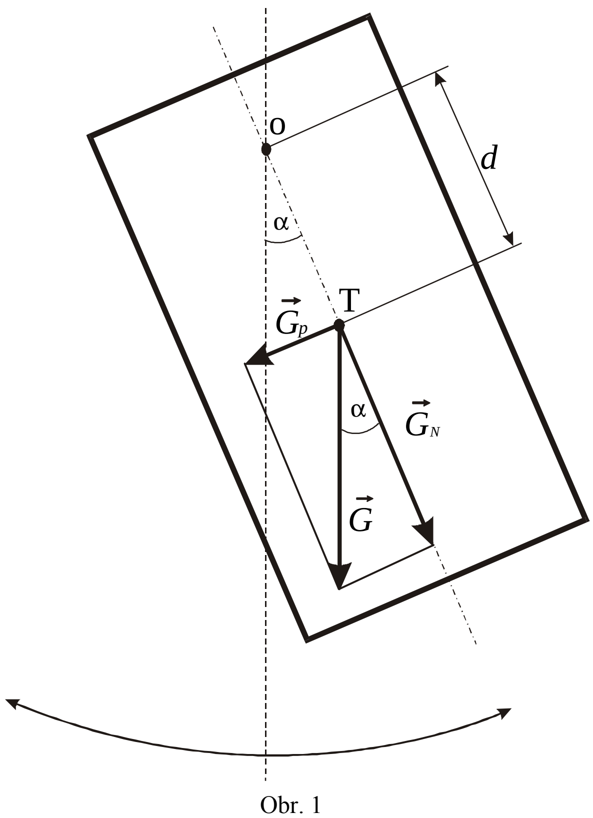
URČENIE MOMENTU ZOTRVAČNOSTI FYZIKÁLNEHO KYVADLA

doc. Ing. Július Štelina, CSc.

Teoretický úvod:

Fyzikálnym kyvadlom rozumieme teleso (napr. dosku, tyč), ktoré vykonáva periodický



Obr. 1

kmitavý pohyb okolo osi, ktorá neprechádza ťažiskom. Schematicky je takéto kyvadlo znázornené na obr. 1. Príčinou jeho pohybu je tiažová sila $\vec{G}$ pôsobiaca v ťažisku telesa. Teleso vychýlené z rovnovážnej polohy o uhol α do rovnovážnej polohy vracia zložka sily $\vec{G}_p$ (obr.1).

Ak kyvadlo kýva v rovine nákresne (obr.1) a os O je na nákresňu kolmá, potom pohybová rovnica takéhoto fyzikálneho kyvadla je

$$\vec{M} = I\,\vec{\varepsilon} \tag{1}$$

kde $\vec{M}$ je vektor momentu sily, I moment zotrvačnosti a $\vec{\varepsilon}$ vektor uhlového zrýchlenia.

Poznámka: Moment zotrvačnosti I pre teleso so spojite rozloženou hmotnosťou je definovaný vzťahom $I = \int_M r^2 dm$, kde M je hmotnosť telesa a r je vzdialenosť hmotného elementu dm od osi otáčania. Pre sústavu hmotných bodov je moment zotrvačnosti definovaný vzťahom $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, kde m_i je hmotnosť i-teho hmotného bodu a r_i je jeho vzdialenosť od osi otáčania.

Kyvadlo znázornené na obr. 1 vykonáva kmity v rovine nákresne okolo osi O kolmej na nákresňu.

Veľkosť moment sily je daná vzťahom

$$M = -G_p . d = -(G \sin \alpha) d = -mgd \sin \alpha \tag{2}$$

kde m je hmotnosť telesa, g je tiažové zrýchlenie a d je vzdialenosť ťažiska od osi, okolo ktorej sa kyvadlo kýva. Znamienko (-) vo vzťahu (2) vyjadruje tú skutočnosť, že sila G_p smeruje vždy do rovnovážnej polohy).

Veľkosť uhlového zrýchlenia je daná vzťahom

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2} . \tag{3}$$

Keď rovnicu (1) vyjadríme v skalárnom tvare, $M=I\varepsilon$, dosadíme do nej vzťahy (2) a (3) a keď neuvažujeme tlmiace sily (teda máme na mysli harmonické kmity netlmené) dostaneme po úprave pohybovú rovnicu fyzikálneho kyvadla v tvare:

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgd \sin \alpha = 0 \ . \tag{4}$$

Pre malé výchylky $\sin \alpha \doteq \alpha$ (rádovo do 5°) a po ďalšej úprave (vydelíme rovnicu (4) veličinou I) dostávame rovnicu

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \alpha = 0 \ . \tag{5}$$

Rovnica (4) je diferenciálna rovnica 2. rádu s konštantnými koeficientami. Jej riešenie má napr. tvar

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi) \ , \tag{6}$$

kde α je okamžitá uhlová vychýlka v danom čase t, α_0 je maximálna uhlová výchylka z rovnovážnej polohy, φ počiatočná fáza alebo tiež fázová konštanta a veličina ($\omega t+\alpha$) je fáza kmitania. Ak funkciu (6) zderivujeme dvakrát podľa času a dosadíme do (5) a súčasne (6) dosadíme za α, ľahko sa presvedčíme, že (6) je riešením rovnice (5) vtedy, keď $\omega^2 = mgd/I$,

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \ . \tag{7}$$

(Záporná hodnota ω nemá fyzikálny význam). Veličina ω je uhlová frekvencia kyvadla. Pre periódu kmitania T ($\omega = 2\pi/T$) dostávame vzťah

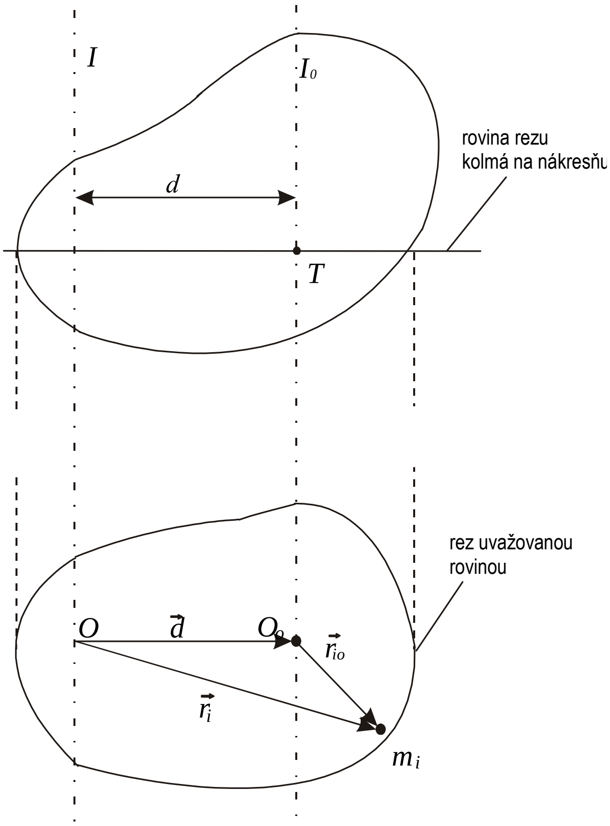
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \ . \tag{8}$$

A z neho pre moment zotrvačnosti vyplýva

$$I = \frac{T^2 mgd}{4\pi^2} \ . \tag{9}$$

Ak napr. pomocou niektorej z fyzikálnych metód určíme periódu T a veličiny m, d (g=9,81ms^{-2}) budeme podľa vzťahu (9) vedieť určiť moment zotrvačnosti vzhľadom na uvažovanú os, okolo ktorej kyvadlo vykonáva periodický pohyb.

Ako vyplýva z pohybovej rovnice (1) rotujúceho telesa (kyvadla), moment zotrvačnosti plní úlohu miery zotrvačných vlastností rotujúceho telesa. Jeho hodnotu potrebujeme vedieť napr. pri určení kinetickej energie rotujúceho telesa $E_{KR} = \frac{1}{2} I\omega^2$ a podobne.



Obr. 2

Ako je známe z dynamiky tuhého telesa, ak poznáme moment zotrvačnosti rotujúceho telesa vzhľadom na určitú os, môžeme určiť moment zotrvačnosti vzhľadom na inú os, ktorá je s ňou rovnobežná, pomocou Steinerovej vety, ktorá hovorí: *Moment zotrvačnosti I telesa vzhľadom na os, neprechádzajúcou ťažiskom, sa rovná momentu zotrvačnosti I_0 vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, ktorá je s danou osou rovnobežná, zväčšenému o mr_0^2, kde m je hmotnosť telesa a r_0 je vzájomná vzdialenosť oboch spomínaných osí t.j.:*

$$I = I_0 + mr_0^2 . \tag{10}$$

Dôkaz Steinerovej vety:

Tuhé teleso chápeme ako sústavu hmotných bodov a moment zotrvačnosti takejto sústavy vzhľadom k ose O je daný vzťahom (obr. 2):

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \quad , \tag{11}$$

kde m_i je hmotnosť i-teho hmotného bodu a $\vec{r}_i$ je jeho poloha vzhľadom na os O. Poloha i-teho hmotného bodu vzhľadom na os O_0 prechádzajúcu ťažiskom je daná polohovým vektorom $\vec{r}_{i0}$. S ohľadom na toto označenie môžeme písať vzťah

$$r_i^2 = \vec{r}_i^{\,2} = \left(\vec{r}_0 + \vec{r}_{i0}\right)^2 = r_0^2 + r_i^2 + 2\vec{r}_0 . \vec{r}_{i0} \tag{12}$$

Po dosadení vzťahu (12) do (11) dostaneme

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_0^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i r_{i0}^2 + 2\vec{r}_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_{i0} \ . \tag{13}$$

Prvý člen na pravej strane $\sum m_i r_0^2 = m\, r_0^2$ a druhý člen $\sum m_i r_{i0}^2 = I_0$. Sumačný výraz $\sum m_i \vec{r}_{i0}$ v treťom člene je rovný nule, lebo vystupuje v čitateli výrazu pre polohový vektor ťažiska

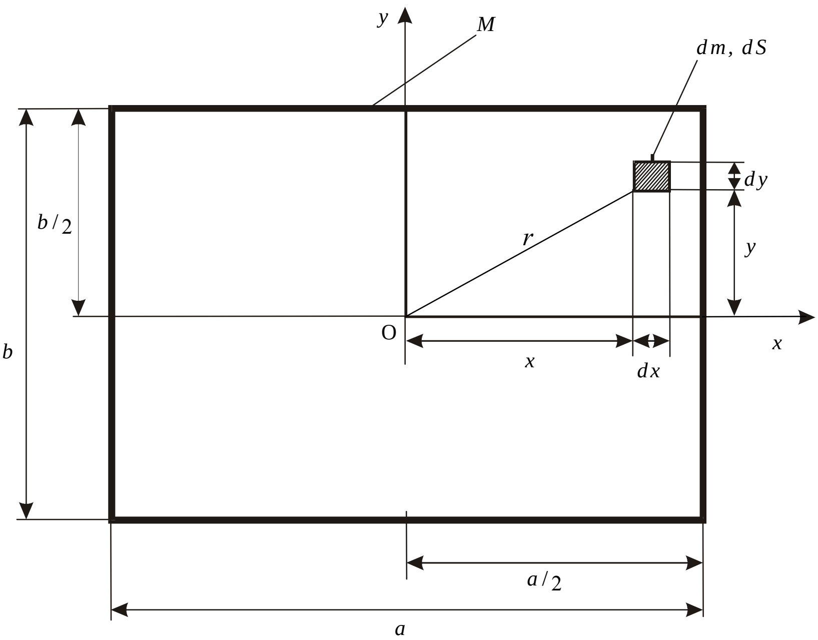
$\vec{r}_{i0}^{\,*} = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_{i0}}{\sum m_i}$ a ten je rovný nule (pretože polohový vektor ťažiska vzhľadom na ťažisko je rovný nule). Vzťah (13) potom prejde na tvar (10), čo sme chceli dokázať.

Poznámka: Veľkosť vektora $\vec{r}_0$ v prípade kyvadla realizovaného vyššie (obr.1) je rovná d.

Odvodenie vzťahu pre moment zotrvačnosti:

Odvoďme vzťah pre moment zotrvačnosti homogénnej dosky obdĺžnikového tvaru vzhľadom na os, ktorá prechádza ťažiskom tejto dosky a je na dosku kolmá. Uvažovanú dosku orientujme vzhľadom na súradnicovú sústavu podľa obr. 3. V našom prípade os, voči ktorej moment zotrvačnosti I_0 určujeme, je totožná s osou „z“ (je kolmá na nákresňu). Moment zotrvačnosti pre štvrť dosky (časť nachádzajúca sa v prvom kvadrante) vyjadríme podľa definície (pozri lit.)

$$\frac{I_0}{4} = \int_M r^2 dm = \int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{b}{2}} \left(x^2 + y^2\right)\frac{M}{S}\, dS = \int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{b}{2}} \left(x^2 + y^2\right)\frac{M}{ab}\, dx\, dy = \frac{M}{ab}\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{b}{2}} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy = \tag{14}$$
$$= \dots = \frac{1}{48} M\left(a^2 + b^2\right).$$



Obr. 3

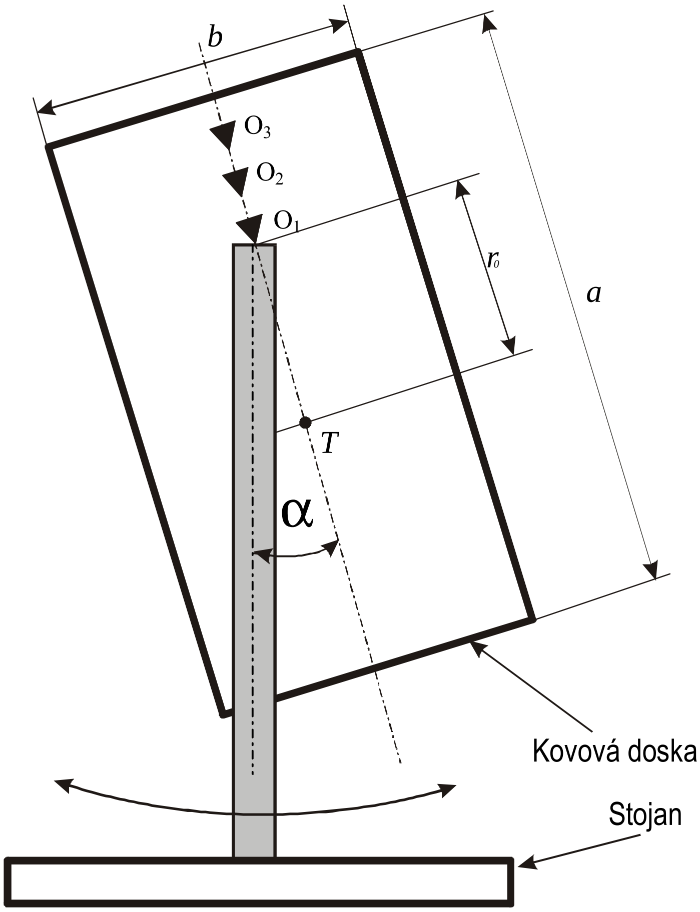
Pre plošnú hustotu sme použili vzťah $\rho_s = \dfrac{M}{S} = \dfrac{dm}{dS} = \dfrac{dm}{dx\,dy}$ a z neho sme vyjadrili hmotnosť nekonečne malého elementu dm. Plocha tohoto elementu je $dS = dx\,dy$ a jeho poloha vzhľadom na uvažovanú os je $r^2 = x^2 + y^2$. Rozmery celej dosky sú dané stranami a, b. Hľadaný moment zotrvačnosti potom bude

$$I_0 = \frac{1}{12} M\left(a^2 + b^2\right) \tag{15}$$

kde M je hmotnosť dosky a a, b jej rozmery.

Náčrt a popis meracieho zariadenia:

Fyzikálne kyvadlo tvorí homogenna kovová doska, ktorá môže vykonávať kmity okolo jednej zo zvolených osí vytvorených britom, ktorý môžeme zaskrutkovať do zvoleného otvoru. Os je vytvorená dotykovým miestom britu na opornej ploške stojana. Toto usporiadanie umožňuje vychýlenie dosky o uhol α_0 z jej rovnovážnej polohy (obr. 4), ktorá sa po uvoľnení bude kývať ako fyzikálne kyvadlo. Vložením britu do iného otvoru v doske máme možnosť voliť vzdialenosť osi otáčania dosky od jej ťažiska.



Obr. 4

Metóda merania a postup pri meraní:

Vážením stanovíme hmotnosť kovovej dosky m. Dosku vážime aj so skrutkami a s britom. Určíme rozmery a, b dosky. Vzdialenosť ťažiska od osi otáčania (britu) r_0 ($r_{01}, r_{02}, r_{03},\ldots$) určíme posuvným meradlom. Po rozkývaní kyvadla (dosky), určíme postupnou metódou periódu jeho kmitov. Namerané hodnoty periód zapíšeme do nasledujúcej tabuľky:

Os č. 1		a = ...	b = ...	m = ...	r_{01} = ...
i	T_i =i10T [s]	i	T_i` = i10T [s]	T_i` - T_i [s]	$\overline{\overline{T}}$
1	T_{10}	6	T_{60}	$T_{60} – T_{10} = T_{50}$	-
2	T_{20}	7	T_{70}	$T_{70} – T_{20} = T_{50}$	-
3	T_{30}	8	T_{80}	.	-
4	T_{40}	9	T_{90}	.	-
5	T_{50}	10	T_{100}	.	-
				$\frac{\sum T_{50}}{5} = \overline{T}_{50}$	$\overline{T} = \frac{\overline{T}_{50}}{50}$

T_{10} v prvom riadku je hodnota prvých 10 period, ktorú sme získali stopkami s medzičasom, atď. Podobný zápis urobíme pre zvolené osi č. 2 a č. 3.

Úlohy:
1. Postupnou metódou určte periódu daného fyzikálneho kyvadla pre tri osi a
2. Stanovte moment zotrvač-nosti *I* vzhľadom na tieto osi.

Spracovanie výsledkov:
1. Namerané hodnoty periódy kyvadla pre zvolené osi využite pre stanovenie mementu zotrvačnosti *I* podľa vzťahu (9).
2. Podľa rovnice (10) určite ťažiskový moment zotrvačnosti, t. j.

$$I_0 = I - mr_0^2 \tag{16}$$

(keď sme *I* určili podľa (9)), pri známej hodnote m a r_0.
Výsledky získané podľa vzťahu (16) vyhodnotíme nasledovne

$$I_{01} = I_1 - mr_{01}^2 \qquad I_{02} = I_2 - mr_{02}^2 \qquad I_{03} = I_3 - mr_{03}^3 \tag{17}$$

3. Výsledný moment zotrvačnosti vzhľadom na ťažiskovú os vyjadríme z nameraných I_{01}, I_{02}, I_{03} podľa vzťahu

$$I_{0M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{0i}}{3} . \tag{18}$$

4. Zo známej hodnoty hmotnosti dosky m a jej rozmemrov a, b vypočítajte podľa vzťahu (15) tzv. vypočítaný ťažiskový moment zotrvačnosti I_0.
5. Vyjadrite percentuálnu odchylku I_0 od I_{0M}, to znamená

$$\Delta\% = \frac{I_{0M} - I_0}{I_0} .100\% \tag{19}$$

Kontrolné otázky:
1. Čo je to fyzikálne kyvadlo? Napíšte jeho pohybovú rovnicu.
2. Definujte moment zotrvačnosti vzhľadom na zadanú os.
3. Vyslovte Steinerovu vetu.
4. Prečo fyzikálne kyvadlo rozkývame len pre uhly $\alpha_0 < 5°$?

Úloha je prevzatá, doplnená a opravená, zo skrípt:
Doc. RNDr. Drahoslav Vajda, CSc., Doc. Ing. Július Štelina, CSc., RNDr. Jaroslav Kovár, Ing. Ctibor Musil, CSc., RNDr. Ivan Bellan, Doc. Ing. Igor Jamnický, CSc. *„Návody k laboratórnym cvičeniam z fyziky“*, vydala Žilinská univerzita vo vydavateľstve EDIS, 2. nezmenené vydanie, rok 2003.