# VYŠETROVANIE PRUŽNEJ DEFORMÁCIE

**RNDr. Jaroslav Kovár**

***Teoretický úvod:***
Medzi hmotnými elementami (atómami alebo iónmi v kryštalickej mriežke) pôsobia príťažlivé a odpudivé sily, ktoré sú iba pri určitej vzdialenosti $r_0$ častíc v rovnováhe.

Pri zväčšovaní vzájomnej vzdialenosti častíc (ťah) prevládnu sily príťažlivé, pri zmenšovaní tejto vzdialenosti (tlak) prevládnu sily odpudivé. Ak sa obmedzíme na veľmi malé deformácie, bude výsledná sila veľmi približne úmerná výchylke z rovnovážnej polohy $r_0$ . Uvedené predpoklady spolu s požiadavkou, aby deformovaná látka bola izotrópna, bývajú dobre splnené u polykryštalických kovových materiálov.

V oblasti malých deformácii je súvis medzi účinkujúcimi silami a deformáciou, ktorú vyvolávajú, vyjadrený Hookovým zákonom, ktorý hovorí: Deformácia pružných telies je úmerná účinkujúcim silám a obrátene. Prevrátená hodnota tejto konštanty úmernosti vystupujúcej v Hookovom zákone sa nazýva Youngov modul pružnosti. Ak deformujúca sila pôsobí kolmo na povrch telesa, vyvoláva deformáciu ťahom alebo tlakom a vystupujúci modul v Hookovom zákone je modul pružnosti v ťahu (značíme *E*). Ak deformujúca sila leží v rovine povrchu telesa alebo je jej dotyčnicou vyvoláva deformáciu šmykom a príslušný modul je modul pružnosti v šmyku (značíme *G*). Takéto deformácie (ťahom, šmykom) nazývame jednoduché a možno ich využiť na experimentálne stanovenie príslušných modulov *E* a *G*. V ďalšom rozoberieme metódy na určovanie modulov *E* a *G*, ktoré sú založené na jednoduchých i zložitejších typoch deformácií.

## I. MERANIE MODULU PRUŽNOSTI V ŤAHU.

*Charakteristika veličiny:*

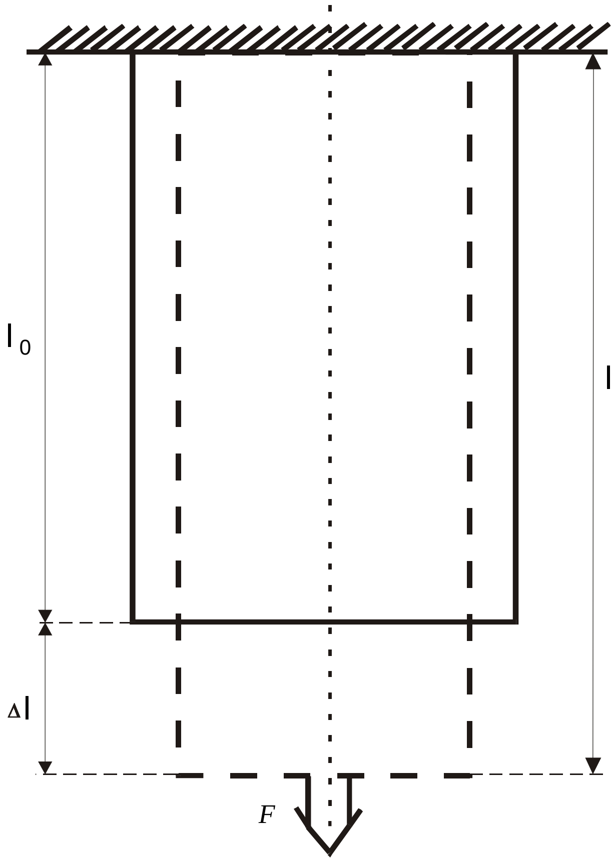
Modul pružnosti v ťahu je materiálová konštanta vyjadrujúca elastické vlastnosti látok. Závisí od druhu materiálu a od teploty. Tak napr. pre oceľ má hodnotu 210 GPa, pre hliník 60 GPa, pre meď 80 GPa, pre iridium 530 GPa a pod. Od teploty závisí tak, že s rastúcou teplotou jej hodnota klesá. Preto je potrebné udávať aj teplotu, pri ktorej bola príslušná hodnota materialovej konštanty nameraná. Jej fyzikálny význam si objasníme na inom mieste.

***Metódy merania:***
V ďalšom uvedieme a rozoberieme dve metódy určovania modulu pružnosti v ťahu. Výber metódy závisí od vyšetrovaných vzoriek, a to podľa toho, či ide o vlákna, tenké drôty, prípadne pásy, prúty, alebo hrubšie tyče, resp. nosníky. V prvom prípade podrobujeme príslušné materiály ťahovej deformácii, v druhom prípade zasa ohybovej deformácii.

### *A. MERANIE MODULU V ŤAHU Z PREDĹŽENIA TYČE (DRÔTU)*

***Teoretický úvod:***

Uvažujme napínanie tyče (drôtu) na jednom konci upevnenej, dĺžky $l_0$ a prierezu $S_0$ silou $F$ v smere osi tyče (obr. 1). Pod napätím pôsobiacim v priečnom reze tyče rozumieme podiel sily $F$ a prierezu tyče $S_0$, kolmého na smer sily $F$ t.j. $\sigma = F / S_0$. Účinkom napätia sa nám tyč predĺži na dĺžku $l$, t.j. o hodnotu $\Delta l = l - l_0$. Pretože táto hodnota je závislá od pôvodnej dĺžky tyče, zavádzame pre ďalší popis veličinu pomerovú danú vzťahom $\varepsilon = \Delta l / l_0$ a nazývame ju relatívne predĺženie. Relatívne predĺženie je bezrozmerné číslo. Pri pružných deformáciach relatívne predĺženie $\varepsilon$ je priamo úmerné mechanickému napätiu $\sigma$ (Hookov zákon), v ktorom prevrátená



Obr. 1

hodnota konštanty úmernosti predstavuje modul pružnosti v ťahu. Matematické vyjadrenie Hookovho zákona je

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{alebo} \quad \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{S_0} \qquad (1)$$

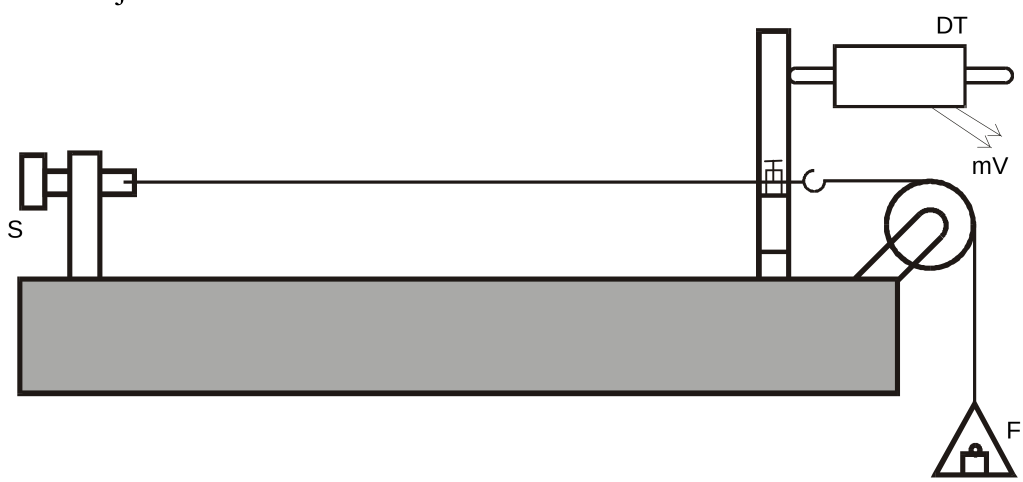
Z Hookovho zákona je zrejmé, že modul pružnosti v ťahu má rovnaký fyzikálny rozmer ako napätie $N/m^2 = Pa$ a predstavuje také napätie, pri ktorom by absolútne predĺženie $\Delta l$ bolo rovné pôvodnej dĺžke, alebo pri ktorom by relatívne predĺženie bolo rovné jednej (za predpokladu, že by taká deformácia vôbec bola možná). Zo vzťahov (1) dostaneme pre $E$

$$E = \frac{l_0}{\Delta l}\frac{F}{S_0} \quad \text{alebo} \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \;. \qquad (2)$$

Stačí už teraz zvoliť vhodnú metódu na meranie predĺženia $\Delta l$, pretože ostatné veličiny vystupujúce vo vzťahu (2) sú bežne merateľné. Na obr. 2 je schematicky zobrazené usporiadanie experimentu umožňujúce zmerať predĺženie $\Delta l$.

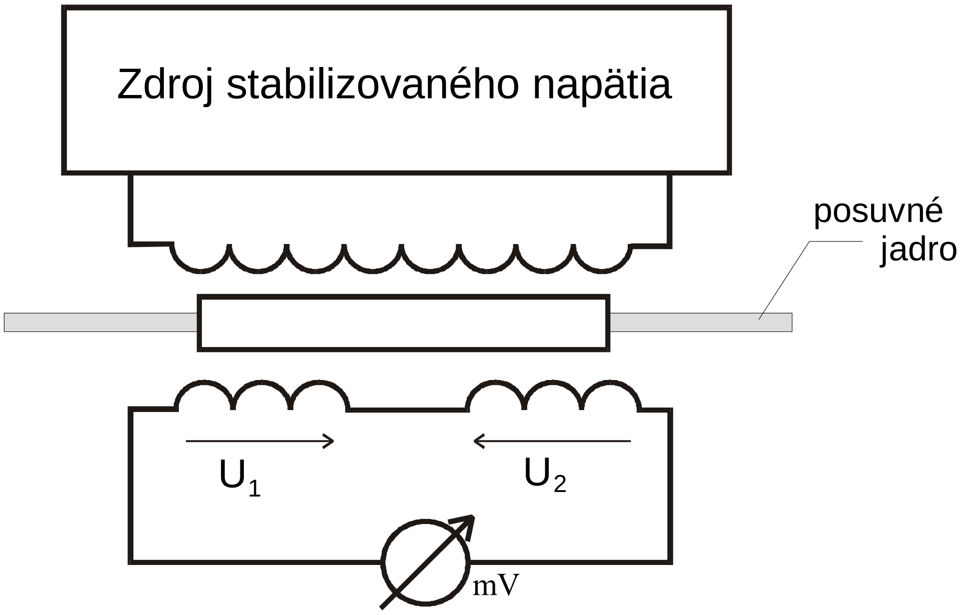
***Popis zariadenia a postup merania:***

Pre stanovenie zmeny dĺžky $\Delta l$ použijeme tzv. diferenciálny transformátor. U diferenciálneho transformátora je možné využiť pre meranie dĺžky závislosti výstupného napätia od polohy posuvného jadra transformátora.



Obr. 2

Primárne vinutie je napájané striedavým prúdom zo stabilizovaného zdroja (obr. 3). Dve rovnaké sekundárne vinutia sú zapojené proti sebe, takže ak jadro je uložené symetricky, je výstupné napätie




Obr. 3

nulové. Ak sa však zmení poloha jadra, zmenia sa amplitúdy napätia oboch sekundárnych vinutí a na výstupe transformátora bude striedavé napätie, ktorého amplitúda je úmerná posunutiu jadra. Meranie dĺžky alebo jej zmeny sa takto prevádza na meranie napätia. Príslušnú dĺžku resp. jej zmenu zistíme z prevodovej krivky $\Delta l = f(u)$, ktorú získame tak, že zmeny $\Delta l$ realizujeme pomocou mikrometrickej skrutky a odčítavame príslušné napätia.

***Úlohy:***

1. Meraním predĺženia drôtu pri jeho napínaní určiť modul pružnosti v ťahu pre dva rôzne materiály.
2. Stanoviť chybu výsledku na základe parciálnych príspevkov meraných veličín.

***Postup merania:***

1. Priamym meraním určíme dĺžku drôtu $l_0$.
2. Pomocou skrutky S (Obr. 2) napneme drôt tak, aby pri základnom zaťažení ukazoval milivoltmeter nulové napätie.
3. Zmeriame teplotu miestnosti.
4. Pridávaním závaží zisťujeme príslušné predĺženie $\Delta l$.
5. Zostrojíme graf závislosti $\Delta l = f\ (F)$ resp. $\Delta l = f\ (m)$.
6. Zostrojíme kalibračnú krivku $\Delta l = f\ (U)$.
7. Zmeriame opäť teplotu miestnosti.
8. Výsledky priamych meraní dosadíme do vzťahu (2) a vypočítame daný modul.
9. Určíme výslednú chybu merania.

Pozn.: Namerané hodnoty zapisujeme do tabuľky, napr. podľa vzoru Tab. I.

***Spracovanie výsledkov:***

Dĺžku drôtu $l_0$ meriame jedenkrát, chybu $\delta_{l_0}$ stanovíme odhadom. Priemer drôtu meriame 10-krát, určíme jeho priemernú hodnotu a strednú kvadratickú odchýlku $\overline{\delta}_d$. Pre 10 rôznych zaťažení drôtu meriame odpovedajúce napätie na výstupe diferenciálneho transformátora. Hodnoty zapisujeme do tabuľky. Pomocou mikrometrickej skrutky k daným hodnotám napätia, zistíme príslušné predĺženie $\Delta l$.

Tab. I

| Č. m. | $m$ [g] | $U$ [mV] | $\Delta l$ [mm] | $k_i = \frac{\Delta l}{m}\left[\frac{mm}{g}\right]$ | $\Delta^2 = \left(k_i - \overline{k}\right)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Pre každé meranie (zaťaženie) vypočítame koeficient $k = \frac{\Delta l}{m}$ , určíme jej priemernú hodnotu aj strednú kvadratickú chybu $\overline{\delta}_k$ . Z priemeru drôtu (priemernej hodnoty) vypočítame plochu prierezu drôtu $\overline{S}$ aj jej chybu podľa vzťahu $\overline{\delta}_S = \left(2S/_d\right)\cdot \overline{\delta}_d$ . Dosadením hodnôt $\overline{k}$ , $\overline{l}_0$, $\overline{S}$ do vzťahu (2) $\overline{E} = \frac{1}{k}\frac{\overline{l}_0}{\overline{S}}g$ vypočítame príslušný modul. Na základe parciálnych príspevkov meraných veličín vypočítame chybu výsledku podľa vzťahu

$$(\delta_E)^2 = E^2\left[\left(\frac{\delta_k}{\overline{k}}\right)^2 + \left(\frac{\delta_{l_0}}{l_0}\right)^2 + \left(2\frac{\delta_d}{\overline{d}}\right)^2\right]. \tag{3}$$

Výsledok uvádzame v tvare $E = \overline{E} \pm \overline{\delta}_E$ .

***Kontrolné otázky:***

1. Vysvetlite obsah Hookovho zákona.
2. Definujte relatívne predĺženie a mechanické napätie pre daný typ deformácie.
3. Posúďte, či sa jedná o metódu priamu alebo nepriamu.
4. Aký je fyzikálny význam modulu pružnosti v ťahu?

## *B. MERANIE MODULU PRUŽNOSTI V ŤAHU Z PRIEHYBU TYČE*

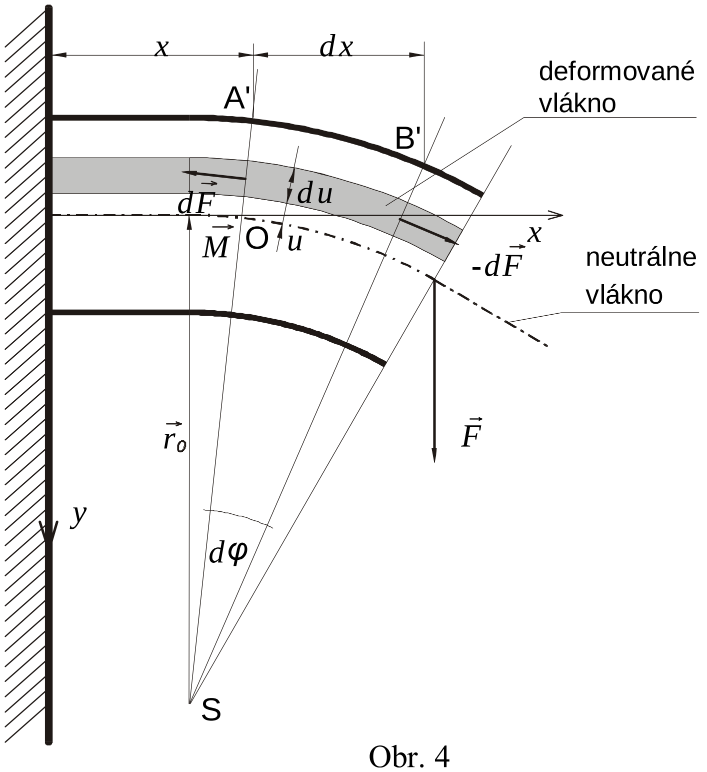
***Teoretický úvod:***

V tejto metóde sa využíva deformácia telies ohybom. Deformácia ohybom je zložitejšou formou deformácie ťahovej (tlakovej). Uvažujme rovnorodú tyč s konštantným prierezom po celej dĺžke, na jednom konci upevnenú a na druhom konci zaťaženú silou $\vec{F}$ (obr. 4).

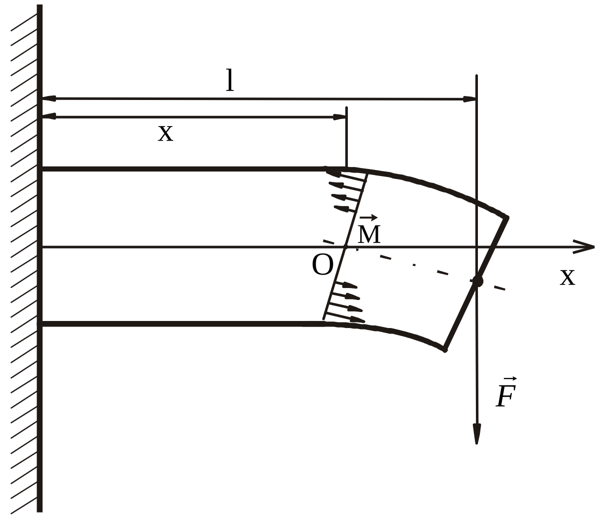
Sila pôsobiaca na jej druhom konci vyvoláva jej priehyb. Prehnutie tyče vplyvom vlastnej váhy bude veľmi malé a preto ho môžeme zanedbať. V ohnutej tyči bude tzv. neutrálne vlákno, ktorého dĺžka má rovnakú veľkosť ako v nedeformovanej tyči. Vlákna nad neutrálnym vláknom sa pri ohybe ťahom predĺžia, vlákna pod neutrálnym vláknom sa v dôsledku tlaku skrátia. Závislosť priehybu konca tyče od ohybovej sily stanovíme na základe rozboru podmienky statickej rovnováhy sústavy. V stave statickej rovnováhy musí byť výsledný moment síl na ktorúkoľvek časť tyče nulový. Analyzujme koncový úsek tyče dĺžky ($l$-$x$) (obr. 5). Výsledný moment síl vzhľadom na os O je nulový, takže platí

$$M - F(l - x) = 0 , \tag{4}$$

kde $\vec{M}$ je moment elastických síl pôsobiacich v rovine rezu. Pre rozbor tohto momentu skúmajme deformáciu dĺžkového elementu tyče medzi rezom AA' a BB'. Element tyče rozdelíme na pozdĺžne vlákna s prierezom $dS$. V dôsledku ohybu sú vlákna zakrivené so spoločným stredom krivosti S. Ak je $r_0$ polomer krivosti neutrálneho vlákna, je polomer krivosti ľubovoľného vlákna $r = r_0 + u$,




Obr. 4



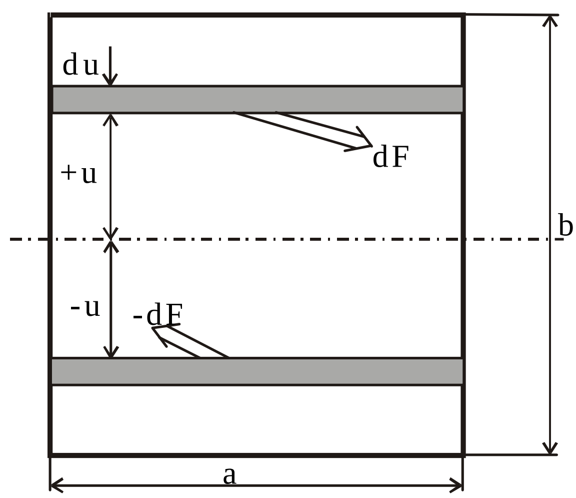

Obr. 5

kde $u$ je súradnica vlákna vzhľadom na vlákno neutrálne (obr. 4), ktorého tvar je popísaný funkciou $y = f(x)$, kde $x$, $y$ sú pozdĺžna a priečna súradnica bodu neutrálneho vlákna. Potom v malom úseku tyče prislúchajúcemu stredovému uhlu $d\varphi$ má neutrálne vlákno dĺžku $r_0 d\varphi$. Vlákno, ktoré je vo vzdialenosti $u$ nad neutrálnym vláknom, bude mať v úseku prislúchajúcemu stredovému uhlu $d\varphi$ dĺžku $(r_0+u)d\varphi$. Jeho relatívne predĺženie bude

$$\varepsilon = \frac{(r_0 + u)d\varphi - r_0 d\varphi}{r_0 d\varphi} = \frac{u\,d\varphi}{r_0 d\varphi} = \frac{u}{r_0}$$

a napätie vlákna bude $$\sigma = E\varepsilon = E\frac{u}{r_0}.$$

Pomocou tohoto napätia môžeme silu pôsobiacu na plôšku o veľkosti $a\,du$ vo vzdialenosti $u$ od neutrálneho vlákna (obr. 6), vyjadriť vzťahom




Obr. 6

$$dF = \sigma a\,du = \frac{Ea}{r_0}u\,du.$$

Vo vzdialenosti $-u$ bude pôsobiť na rovnakú plôšku rovnaká sila, ale opačného smeru. Výsledný otáčavý moment elementárnych síl pôsobiacich v reze A vzhľadom na ohybovú os je

$$M = \int_{-b/2}^{+b/2} u\,dF = \frac{E}{r_0}\int_{-b/2}^{+b/2} a u^2 du = \frac{E}{r_0}I,$$

kde $$I = \int_{-b/2}^{+b/2} a u^2 du = \frac{1}{12}ab^3 \qquad (5)$$

je plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče vzhľadom na ohybovú os.

Nech sa prehnutím tyče zníži neutrálne vlákno o $y$ vo vzdialenosti x od upevneného konca. Polomer krivosti $r_0$ tohoto prehnutia môžeme obecne vyjadriť pomocou y v tvare

$$r_0 = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{y''} \quad ,$$

Kde $y'$ a $y''$ je prvá a druhá derivácia funkcie $y$. V prípade ak uvažujeme malé prehnutie môžeme $y'^2$ zanedbať voči 1. Pre polomer krivosti $r_0$ prehnutia tyče dostaneme potom vzťah $r_0 = 1/y''$, ktorý dosadením do rovnice (4) dáva diferenciálnu rovnicu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{EI}(l - x) \ .$$

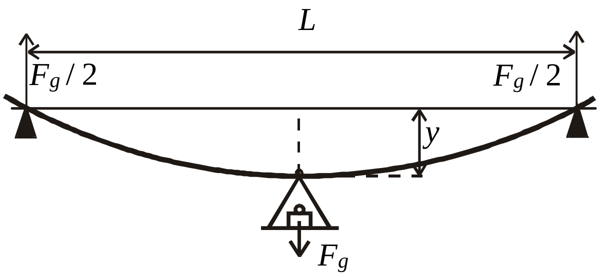
Dvojitou integráciou tejto rovnice a uvážením, že v mieste upevnenia je $y = 0$, upravíme riešenie rovnice na tvar

$$y = \frac{F}{EI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Zníženie tyče $y_1$ na konci zaťaženou silou $F$ bude ($x = l$)

$$y_1 = \frac{Fl^3}{3EI} \quad . \qquad (6)$$

Prakticky modul pružnosti v ťahu meriame na tyči, ktorá je na koncoch podopretá a v prostriedku zaťažená silou $F$. Potom účinok sily $F$ v strede je ten istý, aký by mali sily $F/2$ na koncoch tyče, keď by tyč bola upevnená v prostriedku (obr. 7). Ak dosadíme do vzťahu (6) $l = L/2$, $F = mg/2$, $I = \frac{1}{12}ab^3$ dostaneme po úprave výsledný vzťah pre modul pružnosti



Obr. 7

$$E = \frac{gL^3}{4ab^3}\frac{m}{y} \ , \qquad (7)$$

kde $L$ je vzdialenosť podpier.

Zo vzťahu (7) vyplýva, že priehyb $y$ je priamo úmerný hmotnosti záťaže $m$. Veľkosť priehybu tyče meriame odchýlkomerom.

***Úlohy:***

1. Zmerať modul pružnosti v ťahu pre dva rôzne materiály (oceľ, meď).
2. Stanoviť chybu, s ktorou je daná veličina meraná.

***Postup merania:***

1. Priamym meraním určíme vzdialenosť podpier a charakteristické rozmery prierezu tyče vrátane chýb merania.

2. Odchýlkomer umiestnime do stredu medzi dve podpery a nastavíme ho tak, aby pri základnom zaťažení (dané záťažou misky, na ktorú kladieme závažia) tyče ukazoval nulu.
3. Zmeriame teplotu miestnosti.
4. Danú tyč postupne zaťažujeme a meriame priehyb tyče $y$.
5. Zmeriame opäť teplotu miestnosti.
6. Výsledky priamych meraní dosadíme do vzťahu (7) a vypočítame daný modul.
7. Zostrojíme graf závislosti $y = f(m)$.
8. Určíme výslednú chybu merania.

***Spracovanie výsledkov:***

Vzdialenosť medzi podperami $L$ zmeriame jedenkrát, chybu $\delta_L$ stanovíme odhadom. Priečne rozmery tyče meriame mikrometrom aspoň 10-krát, hodnoty zapisujeme do tabuľky I.

Tabuľka I.

| Č. m. | $a_i$ [mm] | $(a_i - \bar{a})$ [mm] | $(a_i - \bar{a})^2$ [mm$^2$] | $b_i$ [mm] | $(b_i - \bar{b})$ [mm] | $(b_i - \bar{b})^2$ [mm$^2$] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

Z nameraných hodnôt $a_i$, $b_i$ určíme ich aritmetické priemery $\bar{a}$, $\bar{b}$ a stanovíme ich kvadratické odchýlky $\bar{\delta}_a$, $\bar{\delta}_b$. Pre 10 rôznych zaťažení tyče meriame odpovedajúci priehyb $y$. Hodnoty zapisujeme do tabuľky II.

Tabuľka II.

| Č.m. | $m$ [g] | $y$ [mm] | $k_i = y/m$ [kg/m] | $(k_i - \bar{k})^2$ [kg/m$^2$] |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Linearitu závislosti priehybu od zaťaženia overíme tak, že namerané hodnoty vynesieme do grafu $y = f(m)$. Pre každé zaťaženie určíme konštantu $k_i = y_i/m_i$, jej aritmetický priemer $\bar{k}$ a jeho náhodnú chybu $\bar{\delta}_k$. Získané aritmetické priemery pre priamo merané veličiny dosadíme do vzťahu (7), pričom pomer $m/y$ nahradíme konštantou $1/\bar{k}$. Určíme výslednú chybu meranej veličiny z parciálnych príspevkov chýb jednotlivých priamo meraných veličín resp. chyby vypočítanej konštanty k podľa vzťahu

$$\delta_E^2 = E^2\left[\left(3\frac{\delta_l}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{\delta I}{\bar{I}}\right)^2 + \left(\frac{\delta_k}{\bar{k}}\right)^2\right], \tag{8}$$

kde $\left(\frac{\delta_I}{\bar{I}}\right)^2 = \left(\frac{\delta_a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(3\frac{\delta_b}{\bar{b}}\right)^2$ .

Výsledok uvádzame v tvare $E = \bar{E} \pm \bar{\delta}_E$ .

***Kontrolné otázky:***

1. Vysvetlite Hookov zákon.
2. Čo je to relatívne predĺženie a mechanické napätie?
3. Aký je fyzikálny význam modulu pružnosti v ťahu?
4. Prečo je možné merať modul pružnosti v ťahu z priehybu tyče? Je to metóda priama, či nepriama?
5. Čo je to neutrálne vlákno?

## II. MERANIE MODULU PRUŽNOSTI V ŠMYKU.

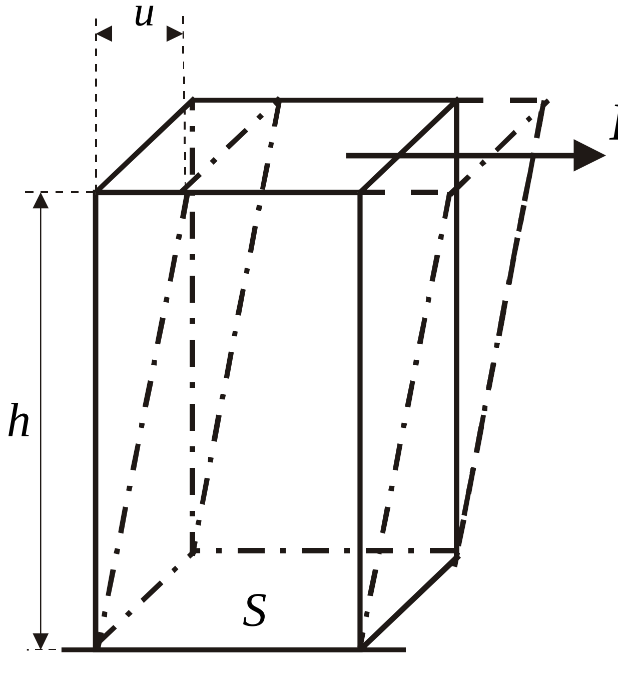
***Teoretický úvod:***
Modul pružnosti v šmyku (niekedy ho nazývame modul torzie), by sme mohli určiť z konkretizácie Hookovho zákona pre deformáciu v šmyku

$$\frac{u}{h} = \frac{1}{G}\frac{F}{S} \quad , \tag{9}$$

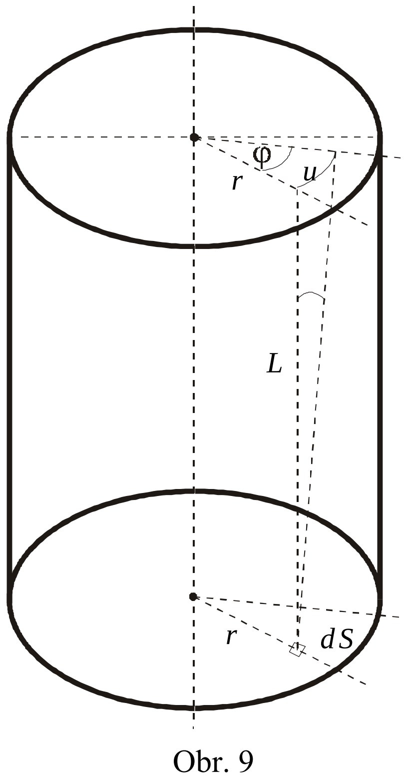
kde význam jednotlivých členov najlepšie ukáže obr. 8. Podiel $F/S = \tau$ predstavuje tangenciálne napätie, $u$ – posunutie hornej základne kvádra voči dolnej základni, $u/h = tg\gamma \doteq \gamma$ predstavuje relatívne posunutie hornej základne voči dolnej. Hookov zákon je možné písať v tvare

$$\tau = G\gamma \tag{10}$$

$G$ – modul pružnosti v šmyku. Zo vzťahov (9), (10) vidieť, že má rozmer napätia (N/m$^2$=Pa) a predstavuje také napätie, pri ktorom by absolútne posunutie $u$ bolo rovné výške hranola $h$, alebo pri ktorom by relatívne posunutie $tg\gamma = 1$ (teda, aby uhol $\gamma$=45°). Priame využitie Hookovho zákona na určenie modulu pružnosti v šmyku je pomerne málo praktické a príslušná metóda aj málo presná.




Obr. 8




Obr. 9

Preto sa modul v šmyku najčastejšie určuje z torzie tyčí alebo drôtov. Pri torzii je totiž každá časť vzorky namáhaná iba šmykom a pritom i keď šmyk v každej časti vzorky je pomerne malý (leží hlboko pod mierou úmernosti deformácie a napätia), výsledný uhol stočenia vzorky môže byť veľký a teda dobre merateľný.

Torzná deformácia je zložitejším prípadom deformácie šmykovej. Jednotlivé priečne vrstvy telesa sa krútením vzájomne natáčajú.

Uvažujme tyč v tvare valca o dĺžke $L$ a priemere $d$ na jednom konci upevnenú. Na druhý koniec pôsobíme krútiacim momentom sily, ktorý vyvoláva šmykovú deformáciu každého pozdĺžneho vlákna dĺžky $L$ a prierezu $dS$ (obr. 9). Sledované vlákno je vo vzdialenosti $r$ od torznej osi, predstavovanej neutrálnym vláknom, ktoré sa pri krútení nedeformuje. Pri natočení voľného konca tyče (vplyvom krútiaceho momentu) o uhol $\varphi$ sa posunie voľný koniec vlákna po kružnici polomeru $r$ o úsek $u = r\varphi$. Šmykový deformačný uhol $\alpha = u / L = r\varphi / L$ súvisí podľa Hookovho zákona s tangenciálnym napätím $\tau = dF / dS = G\alpha$. Sila pripadajúca na elementárnu plošku $dS$ sledovaného vlákna pôsobí vzhľadom na torznú os momentom sily $dM = rdF = rG\alpha\, dS = rG(r\varphi / L).dS = (G / L)r^2\varphi\, dS$. Celkový torzný moment sily dostaneme integráciou elementárnych momentov sily po celej ploche voľnej podstavy

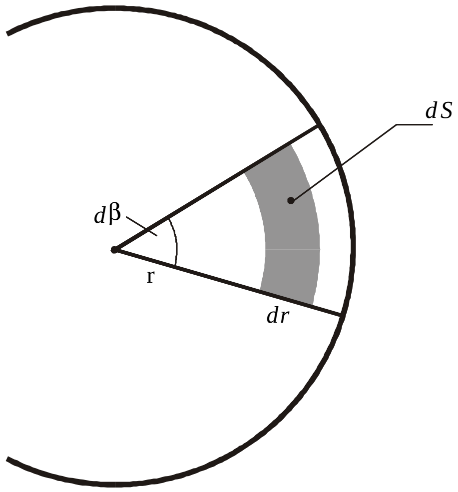
$$M = \int_{(S)} dM = \frac{G\varphi}{L}\int_{(S)} r^2\, dS = \frac{GI}{L}\varphi \quad , \tag{11}$$

kde $I = \int_{(S)} r^2\, dS$ je plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče vzhľadom na torznú os. Pre tyč s kruhovým prierezom postupujeme pri výpočte $I$ tak, že plochu kruhu rozdelíme na elementy (obr.10), ktoré v polárnych súradniciach nadobúdajú vyjadrenie

$$dS = r.d\beta.du$$

a vypočítame príslušný integrál

$$I = \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{d/2} r^3\, dr = \frac{\pi d^4}{32} \quad . \tag{12}$$




Obr. 10

Zo vzťahu (11) vidíme, že torzný uhol $\varphi$ je priamo úmerný torznému momentu $M$. Konštantu

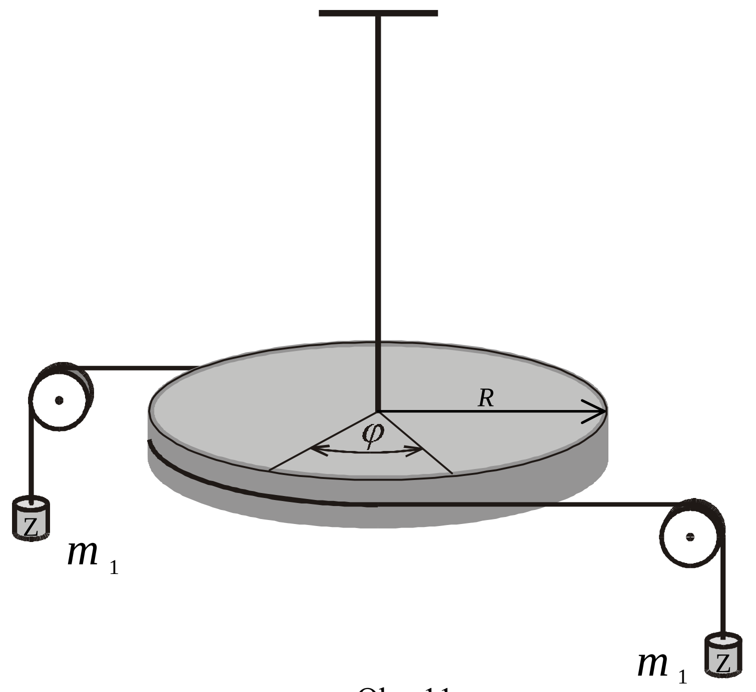
$$M_0 = \frac{GI}{L} \tag{13}$$

nazývame direkčným momentom tyče.

*__Metódy merania modulu pružnosti v šmyku:__*

### *A. STATICKÁ METÓDA MERANIA MODULU PRUŽNOSTI V ŠMYKU.*

Statická metóda merania modulu pružnosti v šmyku využíva torziu tenkej tyče (drôtu) zo skúmaného materiálu. Tyč je zavesená tak, že horný koniec je upevnený v držiaku a




Obr. 11

k dolnému koncu tyče je pripevnený kotúč s uhlovou stupnicou (obr. 11). Na obvode kotúča pôsobia sily kolmé na torznú os, vyvolané cez kladky tiažou závaží o hmotnostiach $m_1$ a $m_2$. Výsledný torzný moment týchto síl je $(m_1+m_2)gR$, kde $R$ je polomer kotúča. Aby nevznikla sila vychyľujúca os kotúča volíme závažia tak, aby $m_1=m_2$. Uvedený moment sily dosadíme do vzťahu (11) spolu so vzťahom (12) a pre modul pružnosti $G$ dostaneme vzťah

$$G = \frac{32gRL}{\pi d^4} . \frac{m_1 + m_2}{\varphi} \tag{14}$$

.

***Úlohy:***

1. Zmerať modul pružnosti v šmyku pre dva rôzne materiály (oceľ, meď).
2. Stanoviť chybu merania pre daný modul.

***Postup merania a spracovanie výsledkov:***

1. Po upevnení tyče (drôtu) do príslušného zariadenia určíme priamym meraním hodnoty veličín $R$, $L$, $d$. Dané veličiny meriame viackrát (aspoň 10-krát) a určíme ich aritmetické priemery $\overline{R}$, $\overline{L}$, $\overline{d}$ a k ním príslušné náhodné chyby $\overline{\delta}_R$, $\overline{\delta}_L$, $\overline{\delta}_d$.
2. Zmeriame teplotu miestnosti.
3. Danú tyč postupne zaťažujeme prikladaním závaží a meriame jej uhol skrútenia $\varphi$.
4. Opäť zmeriame teplotu miestnosti.
5. Hodnoty zapisujeme do tabuľky III.

Tabuľka III.

| Č. m. | $m_1+m_2$ [g] | φ [rad] | $k_i = \dfrac{\varphi}{m_1 + m_2}$ | $(k_i - \overline{k})^2$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

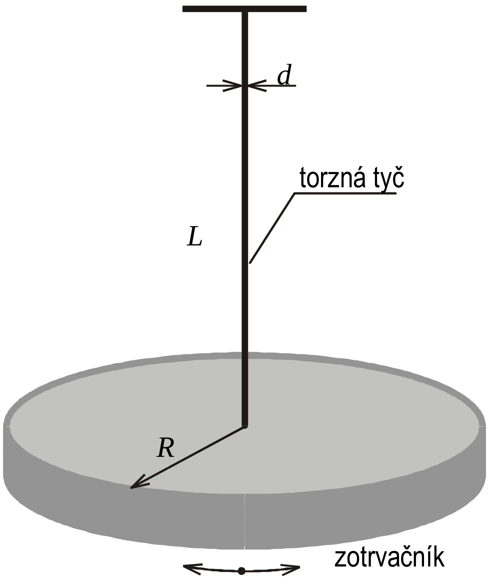
6. Overíme linearitu torznej deformácie tak, že namerané hodnoty $\varphi$ vynesieme do grafu $\varphi = f(m)$. Pre každé zaťaženie určíme konštantu $k = \dfrac{d\varphi}{dm}$, jej aritmetický priemer $\overline{k}$ a k nej príslušnú náhodnú chybu $\overline{\delta}_k$. Výsledky merané dosadíme do vzťahu (14), v ktorom pomer $(m_1 + m_2)/\varphi$ nahradíme konštantou $1/k$.
7. Určíme chybu merania veličiny $G$ vyplývajúcu z parciálnych chýb jednotlivých priamo meraných veličín resp. chyby vypočítanej konštanty $k$. Danú chybu stanovíme zo vzťahu

$$\overline{\delta}_G^2 = \overline{G}^2 \left[ \left( \frac{\overline{\delta}_R}{\overline{R}} \right)^2 + \left( \frac{\overline{\delta}_L}{\overline{L}} \right)^2 + \left( 4\frac{\overline{\delta}_d}{\overline{d}} \right)^2 + \left( \frac{\overline{\delta}_k}{\overline{k}} \right)^2 \right]. \tag{15}$$

***B. DYNAMICKÁ METÓDA MERANIA MODULU PRUŽNOSTI V ŠMYKU S POUŽITÍM TORZNÉHO KYVADLA.***

Experiment usporiadajme podobne ako v predchádzajúcej metóde, len namiesto uhlomerného kotúča upevníme na dolný koniec tyče vhodné teleso (zotrvačník), ktorého moment zotrvačnosti $I_T$ voči pozdĺžnej osi tyče je mnohonásobne väčší ako moment zotrvačnosti tyče samotnej. Tak dostaneme dynamickú kmitavú sústavu, ktorá je schopná konať torzné kmity okolo torznej osi (obr. 12) – torzné kyvadlo. Pri otáčaní telesa okolo torznej osi pôsobí deformovaná tyč na teleso momentom sily podľa (11), ale opačného znamienka. Potom pohybová rovnica rotačného pohybu okolo torznej osi bude

$$I_T \varepsilon = -M ,$$




Obr. 12

kde $I_T$ je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania $\varepsilon = d^2\varphi / dt^2$ je uhlové zrýchlenie. Po dosadení za $M$ zo vzťahu (10) a úprave dostane pohybová rovnica tvar

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{GI}{LI_T}\varphi = 0 \quad . \tag{16}$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice je harmonická funkcia tvaru

$$\varphi = \varphi_0 \; sin(\omega t + \psi),$$

o čom sa môžeme presvedčiť jej priamym dosadením do rovnice (16), kde $\omega = \sqrt{GI / LI_T}$ je uhlová frekvencia kmitavého pohybu a súvisí s periódou vzťahom $\omega = 2\pi / T$ . Modul pružnosti v šmyku potom vyjadríme vzťahom

$$G = \frac{4\pi^2}{T^2} \; \frac{LI_T}{I} \tag{17}$$

do ktorého za $I$ dosadíme vzťah (12) a za $I_T$ moment zotrvačnosti zaveseného telesa (ak je telesom valec, potom $I_T = mR^2 / 2$ , kde $m$ je hmotnosť valca a $R$ jeho polomer).

***Úlohy:***

1. Zmerať modul pružnosti v torzii pre rôzne materiály.
2. Stanoviť náhodilú chybu výsledku.

***Postup merania a spracovanie výsledkov:***

1. Zostavíme torzné kyvadlo a určíme priamym meraním hodnoty jeho parametrov (dĺžku tyče, priečne rozmery tyče, rozmery a hmotnosťzaveseného telesa). Dané parametre meriame viackrát (aspoň 10-krát) stanovíme ich priemerné hodnoty a príslušné náhodilé chyby.
2. Zmeriame teplotu miestnosti.
3. Kyvadlo slabo rozkmitáme a postupnou metódou určíme periódu kmitov vrátane chyby merania. Meriame aspoň 100 period. Údaje zapisujeme do tabuľky IV.

Tabuľka IV.

| Počet per. $n$ | $n\ T$ [s] | Počet per. $(n+50)$ | $(n+50)\ T$ [s] | $\tau=(n+50)\ T$ - nT = 50 $T$ | $(\tau-\bar{\tau})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

kde $\bar{\tau}$ je aritmetický priemer. Periódu určíme aspoň pre dve rôzne dĺžky kyvadla.

4. Opäť zmeriame teplotu miestnosti.
5. Dosadením hodnôt priamo meraných veličín do vzťahu (17) vypočítame hodnotu meranej veličiny $G$. Určíme chybu merania (výsledku) s uvážením parciálnych príspevkov chýb jednotlivých priamo meraných veličín podľa vzťahu

$$\bar{\delta}_G^2 = G^2\left[\left(2\frac{\bar{\delta}_T}{\bar{T}}\right)^2+\left(\frac{\bar{\delta}_L}{\bar{L}}\right)^2+\left(\frac{\bar{\delta}_{I_T}}{\bar{I}_T}\right)^2+\left(\frac{\bar{\delta}_I}{\bar{I}}\right)^2\right] , \tag{18}$$

v ktorom relatívne chyby momentov zotrvačnosti $I_T$ a $I$ určíme zo vzťahov

$$\left(\frac{\bar{\delta}_{I_T}}{\bar{I}_T}\right)^2=\left(\frac{\bar{\delta}_m}{\bar{m}}\right)^2+\left(2\frac{\bar{\delta}_R}{\bar{R}}\right)^2; \qquad \left(\frac{\bar{\delta}_I}{\bar{I}}\right)^2=\left(4\frac{\bar{\delta}_d}{\bar{d}}\right)^2 . \tag{19}$$

Výsledok uvedieme v tvare $G = \overline{G} \pm \bar{\delta}_G$ .

***Kontrolné otázky:***

1. Napíšte Hookov zákon pre deformáciu v šmyku.
2. Napíšte vzťahy pre relatívne posunutie a mechanické napätie pri deformácii šmykom.
3. Objasnite fyzikálny význam modulu pružnosti v šmyku.
4. Prečo je možné merať modul pružnosti v šmyku z torzie drôtu (tyče)?
5. Čo je neutrálne vlákno a kadiaľ prechádza?
6. Popíšte metódu postupných meraní.
7. Odvoďte vzťahy pre výpočet chyby výsledku (15), (18), (19).

**Úloha je prevzatá, doplnená a opravená, zo skrípt:**

Doc. RNDr. Drahoslav Vajda, CSc., Doc. Ing. Július Štelina, CSc., RNDr. Jaroslav Kovár, Ing. Ctibor Musil, CSc., RNDr. Ivan Bellan, Doc. Ing. Igor Jamnický, CSc. *„Návody k laboratórnym cvičeniam z fyziky"*, vydala Žilinská univerzita vo vydavateľstve EDIS, 2. nezmenené vydanie, rok 2003.