

KATEDRA FYZIKY ŽU-EF ŽILINA		
Študent	Názov práce	Dátum
Skupina	<u>II.5D Určenie modulu pružnosti v šmyku dynamickou metódou</u>	Vyučujúci
Fakulta		

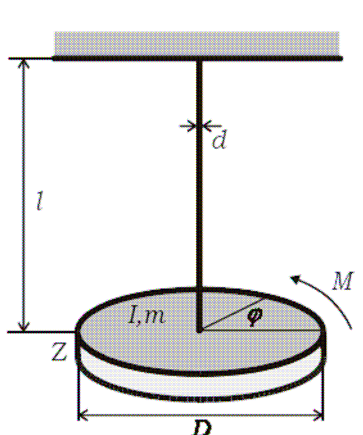
Cieľ merania

1. Zmeranie základných rozmerov torzného kyvadla
2. Určenie doby kmitu postupnou metódou
3. Určenie modulu pružnosti v šmyku a jeho chyby

Pomôcky:

- Stopky, mikrometer ($\Delta = 0,01$ mm), posuvné meradlo ($\Delta = 0,1$ mm), pásmový meter ($\Delta = 1$ mm), váhy (1g)
- Torzné kyvadlo

Teória



Ak teleso Z, zavesené na skrútenom drôte pootočime a pustíme, torzné sily skrúteného drôtu ho budú vracat' do rovnovážnej polohy a teleso sa rozkmitá rotačnými (torznými) kmitmi okolo osi symetrie idúcej osou periodicky skrúcaného drôtu.

Pohybová rovnica tohoto systému má tvar

$$I \varepsilon + M = 0 \quad (1)$$

kde I je moment zotrvačnosti použitého zotrvačníka - Z, v našom prípade rotačného valca. Jeho moment zotrvačnosti vypočítame ako:

$$I = \frac{1}{8} m D^2 \quad (2)$$

pričom m je hmotnosť zotrvačníka a D je jeho priemer.

Moment sily M v rovnici (1) môžeme vyjadriť ako:

$$M = \frac{\pi G d^4}{32 L} \varphi \quad (3),$$

kde L je dĺžka a d je priemer torzného kyvadla (pozri obrázok).

Rovnica (1) je diferenciálna rovnica druhého rádu, ktorej riešením dostaneme sínusovú funkciu výchylky $\varphi(t)$ torzného kyvadla – čiže sa jedná o kmity s určitou periódou. Modul pružnosti v šmyku G môže byť pritom určený meraním tejto periódy torzného kyvadla. Pre jeho výpočet môžeme sa dá odvodiť vzťah:

$$G = \frac{128 \pi L I}{d^4 T^2} \quad (4)$$

kde T [s] je doba periódy torzných kmitov kyvadla.

Postup merania

- Odvážime zotrvačník na digitálnych váhach.
- Zmeriame posuvným meradlom priemer zotrvačníka.
- Zmeriame dĺžku drôtu.
- Pomocou mikrometra zmeriame 10 krát priemer drôtu (torzná tyč). Namerané hodnoty zapíšeme do tabuľky č. 1. Z nameraných hodnôt d_i určíme aritmetický priemer \bar{d} a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\bar{\delta}_d$.
- Rozkmitáme torzné kyvadlo a metódou postupných meraní určíme dobu kmitu \bar{T} a strednú kvadratickú odchýlku $\bar{\delta}_T$. Namerané hodnoty zapíšeme do tabuľky č.2.
- Pomocou vzťahu (2) určíme moment zotrvačnosti zotrvačníka. Použitím vzťahu (4) vypočítame modul pružnosti v šmyku.
- Následne určíme chyby merania.

Experimentálne meranie

1. Zmeranie základných parametrov torzného kyvadla:

Hmotnosť zotrvačníka: $m = (1,003 \pm 0,001) \text{ kg}$

Priemer zotrvačníka: $D = (7,97 \pm 0,01) \text{ cm} = (0,0797 \pm 0,0001) \text{ m}$

Dĺžka torznej tyče: $L = (68 \pm 0,1) \text{ cm} = (0,680 \pm 0,001) \text{ m}$

Určenie priemeru drôtu:

i	d_i [mm]	$\Delta_i = (\bar{d} - d_i)$ [10^{-4} mm^2]	$(\Delta_i)^2$ [10^{-8} mm^2]
1	1,570	-50	2500
2	1,560	50	2500
3	1,570	-50	2500
4	1,560	50	2500
5	1,570	-50	2500
6	1,560	50	2500
7	1,560	50	2500
8	1,560	50	2500
9	1,570	-50	2500
10	1,570	-50	2500
	15,650		25000×10^{-8}

Tabuľka č. 1: Namerané hodnoty priemeru drôtu (torznej tyče) d_i , odchýlky jednotlivých meraní od strednej hodnoty Δ_i a ich druhé mocniny $(\Delta_i)^2$.

Aritmetický priemer priemeru valčeka:
$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{10} d_i}{10} = \frac{15,650}{10} = 1,565 \text{ mm}$$

Výpočet strednej kvadratickej chyby aritmetického priemeru valčeka:

$$\bar{\delta}_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (\Delta_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{25000 \times 10^{-8}}{10(10-1)}} = 16,66 \times 10^{-4} \doteq 0,002 \text{ mm}$$

Priemer drôtu: $d = \bar{d} \pm \bar{\delta}_d = (1,565 \pm 0,002) \text{ mm} = (1,565 \pm 0,002) \times 10^{-3} \text{ m}$

2. Určenie doby kmitu postupnou metódou

i	i10T [s]	i + 5	(i+5)10T [s]	$\Delta T_i = T_{i+5} - T_i$ [s]	$\Delta T_i/50$ [s]	$\Delta_i = \bar{T} - \Delta T_i/50$ [10^{-5} s]	$(\Delta_i)^2$ [10^{-10} s^{-2}]
1	6,70	6	40,07	33,37	0,6674	-136,00	18496
2	13,41	7	46,68	33,27	0,6654	64,00	4096
3	20,06	8	53,36	33,30	0,6660	4,00	16
4	26,73	9	60,02	33,29	0,6658	24,00	576
5	33,36	10	66,64	33,28	0,6656	44,00	1936
				166,51			25120×10^{-10}

Tabuľka č.2: Tabuľka pre výpočet doby kmitu torzného kyvadla metódou postupných meraní.

Aritmetický priemer doby kmitu: $\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^{10} T_i}{5 \times 50} = \frac{166,51}{250} = 0,66604 \text{ s}$

Výpočet strednej kvadratickej chyby aritmetického priemeru doby kmitu:

$$\bar{\delta}_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (\Delta_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{25120 \times 10^{-10}}{5(5-1)}} = 0,000354 \doteq 0,0004 \text{ s}$$

Doba kmitu torzného kyvadla: $T = \bar{T} \pm \bar{\delta}_T = (0,6660 \pm 0,0004) \text{ s}$

3. Určenie modulu pružnosti v šmyku a jeho chyby

Výpočet momentu zotrvačnosti valcového zotrvačníka:

$$I = \frac{1}{8} m D^2 = \frac{1}{8} \times (1,003 \text{ kg}) \times (0,0797 \text{ m})^2 = 0,000796 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_I &= I \sqrt{\left(\frac{\bar{\delta}_m}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{\bar{\delta}_D}{D}\right)^2} = (0,000796 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \sqrt{\left(\frac{0,001}{1,003}\right)^2 + \left(2 \frac{0,0001}{0,0797}\right)^2} \\ &= (0,000796 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) \sqrt{(0,997 \times 10^{-3})^2 + (2,506 \times 10^{-3})^2} = 2,15 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \doteq 2 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Moment zotrvačnosti torzného kyvadla: $I = \bar{I} \pm \bar{\delta}_I = (796 \pm 2) \times 10^{-6} \text{ kg.m}^2$

Výpočet modulu pružnosti v šmyku ocelového drôtu (torzného kyvadla):

$$G = 128 \frac{\pi I L}{\bar{d}^4 \bar{T}^2} = 128 \frac{3,14 \times (796 \times 10^{-6} \text{ kg.m}^2) \times (0,68 \text{ m})}{(1,565 \times 10^{-3} \text{ m})^4 \times (0,666 \text{ s})^2} = 81,803 \times 10^9 \text{ Pa} = 81,803 \text{ GPa}$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_G &= G \sqrt{\left(\frac{\bar{\delta}_I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}_L}{L}\right)^2 + \left(4 \frac{\bar{\delta}_d}{d}\right)^2 + \left(2 \frac{\bar{\delta}_T}{T}\right)^2} = \\ &= (81,803 \times 10^9 \text{ Pa}) \sqrt{\left(\frac{2 \times 10^{-6}}{796 \times 10^{-6}}\right)^2 + \left(\frac{0,001}{0,68}\right)^2 + \left(4 \frac{0,002 \times 10^{-3}}{1,565 \times 10^{-3}}\right)^2 + \left(2 \frac{0,0004}{0,6660}\right)^2} \\ &= (81,803 \times 10^9 \text{ Pa}) \sqrt{(2,513 \times 10^{-3})^2 + (1,471 \times 10^{-3})^2 + (5,112 \times 10^{-3})^2 + (1,201 \times 10^{-3})^2} \\ &= 1,27 \times 10^9 \text{ Pa} \doteq 1 \times 10^9 \text{ Pa} = 1 \text{ GPa} \end{aligned}$$

Moment modulu pružnosti v šmyku: $G = \bar{G} \pm \bar{\delta}_G = (82 \pm 1) \text{ GPa}$

Záver merania

Priemer drôtu: $d = \bar{d} \pm \bar{\delta}_d = (1,565 \pm 0,002) \times 10^{-3} \text{ m}$

Doba kmitu torzného kyvadla: $T = \bar{T} \pm \bar{\delta}_T = (0,6660 \pm 0,0004) \text{ s}$

Moment modulu pružnosti v šmyku: $G = \bar{G} \pm \bar{\delta}_G = (82 \pm 1) \text{ GPa}$

Určený modul pružnosti meraného ocelového drôtu v šmyku je v rámci rozsahu tabuľkových hodnôt, ktorý je: 79-86 Gpa.