1 Fermatov Princíp

Abstrakt

Zákon odrazu a lomu rozoberá nielen Huygens-Fresnelov princíp, ktorý vyjadruje mechanizmus šírenia vlnenia priestorom, ale i Fermatov princíp, ktorý sa pokladá za základný princíp geometrickej optiky.

Obr. 1: Pierre de Fermat-"Knieža laikov"

Pierre de Fermat (1601-1665) je jedným z klasicky vzdelaných géniov, ako bol Ampére, nikdy nechodil na vysokú školu. Veľmi skoro získal vzdelanie v Latinčine a Gréčtine. Fermat čítal všetky matematické diela z antiky v originánom znení, a to rozvíjalo jeho intelekt.
Fermat neveril Descartovým tvrdeniam o rýchlosti svetla. Vyhlásil, že jeho vzťah pre lom svetla $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ =konštanta, nemôže byť pravda. Konštanta v Descartovom ponímaní vyjadrovala vzťah Konšt $= \frac{v_2}{v_1}$, kde v_1 bola rýchlosť svetla v prvom médiu (vzduch) a v_2 bola rýchlosť svetla vo vode, α uhol dopadu a β uhol lomu. Sám sa pustil do hľadania vzťahu myšlienkou o najľahšej ceste svetla a o odpore prostredia, ale po štyroch rokoch výpočtov dostal to isté čo Descartes.

1.1 Fermatov princíp najmenšieho času

Už Heron Alexandrijsky predpokladal, že pre svetlo platí *princíp najmenšej vzdialenosti*:

> **Lúč svetla putuje medzi dvoma rozdielnými bodmi po najmenšej možnej dráhe v priestore.**

Tento výrok sa týkal odrazu a prechodu cez homogénne prostredie (prostredie charakterizované jednotkovým indexom lomu). V roku 1657 P.Fermat modifikoval Heronov výrok a formuloval *princíp najmenšieho času*:

> **Lúč svetla pri prechode z jedného bodu do druhého sa pohybuje po takej dráhe aby minimalizoval čas nutný na prechod.**

Nech pohybujúci sa lúč prejde vzdialenosť s s rýchlosťou v za t sekund a platí:

$$t = \frac{s}{v}$$

Ak sa lúč pohybuje rôznymi rýchlosťami po rôznych dráhach pre čas pohybu platí:

$$t = \sum_{m=1}^{M} \frac{s_m}{v_m}$$

Kedže poznáme rýchlosť svetelného lúča v prostredí s indexom n je $v = \frac{c}{n}$ teda

$$t = \sum_{m=1}^{M} \frac{s_m}{\left(\frac{c}{n_m}\right)} = \frac{1}{c}\sum_{m=1}^{M}(n_m s_m) = \frac{\ell}{c} \tag{1}$$

Podľa Fermatovho princípu je skutočná dráha lúča SOP daná podmienkou

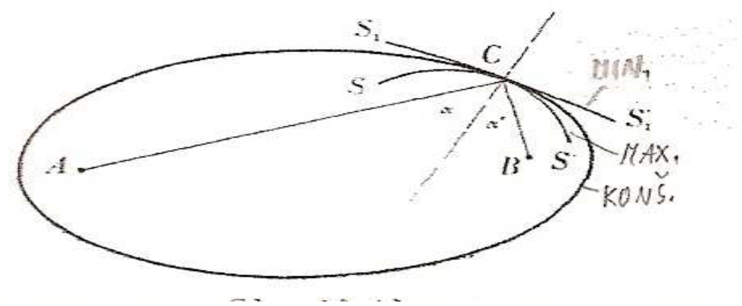
$$\delta t = 0 \quad \text{alebo} \quad \delta\ell = 0$$

A tak čas nutný na prejdenie skutočnej dráhy v rôznych prostrediach je rovný času na prejdenie dlhšej dráhy ℓ vo vákuu; dràha je dlhšia pretože $n_m \geq 1$. Táto dlhšia dráha $\ell = ns$ sa nazíva *optická dráha svetla*. Je to vzdialenosť dvoch bodov v tom istom prostredí znásobená jeho absolútnym indexom lomu. To znamená, že svetlo potrebuje najmenší čas na prejdenie cesty s najmenšou optickou dráhou. A preto princíp najmenšieho času môže byť upravený:

> **Lúč svetla ide pri odraze a lome na rovinnom rozhraní tak aby jeho optická dráha bola minimálna**

Fermatov princíp vyžaduje, aby bola extrémna. Na základe zakrivenia odrážajúcej alebo lámavej plochy optická dráha svetla môže byť aj maximálna alebo konštantná. Tak Fermatov princíp môžme vysloviť aj takto:

> **Svetlo sa šíri vo vákuu aj v hmotnom prostredí pozdĺž čiary, po ktorej trvanie tohoto deja vzhľadom na čiary od nej málo odlišné je extrémne**



Obr. 2: Optická dráha je extrémna

Ako z obrázka vyplýva, nech je dané duté zrkadlo tvaru rotačného elipsoidu s ohniskami v bodoch A a B. Keďže normála v ľubovaľnom bode C tejto plochy zviera so spojnicami $\overline{AC}$ a $\overline{BC}$ rovnaké uhly, značí to, že každý vychádzajúci lúč z bodu A po odraze na zrkadle prechádza bodom B, pričom súčet dĺžok $\overline{AC}+\overline{BC}$ má konštantnú hodnotu. S ohľadom na rotačnú plochu znázornenú v reze oblúkom SS' je však dráha ACB maximálna a s ohľadom na plochu S_1S_1' minimálna.

V prípade, že svetlo prechádza prostredím, ktorého index lomu sa spojite mení, treba rozdeliť geometrickú dráhu lúča na tak malé úseky dl, aby index lomu pozdĺž nich bol stály. Elementárna optická dráha je ndl a celá optická dráha je daná integrálom $\int_S^P ndl$. Fermatov priníp môžme potom napísať v tvare:

$$\delta \int_S^P ndl = 0$$

Táto rovnica je všeobecnou formuláciou Fermatovho princípu.

Boli uvedené mnohé formulácie princípu najmenšieho času. Čo však spôsobí, že svetlo "vie", že má ísť k zrkadlu? Princíp spočíva v tom, že svetlo ide po dráhe tak, že v blízkosti je mnoho iných dráh, prechod po ktorých trvá rovnaký čas. Podľa (1) je doba t, ktorú potrebuje lúč k prejdeniu dráhy medzi dvoma vlnoplochami vyjadrená vzťahom $t = \frac{\ell}{c}$. Táto doba je pre všetky lúče medzi dvoma vlnoplochami stála a platí $\ell =$ const. Jednoducho ide o to, že mi aranžujeme situáciu a svetlo sa rozhodne, ktorý čas je najkratší alebo extrémny a podľa toho si vyberie dráhu. Je to vlastnosť svetla, ktorá nie je známa v geometrickej optike a ktorá spočíva v myšlienke vlnovej dĺžky, vlnová dĺžka nám povie, ako ďaleko musí svetlo preskúmať dráhu, aby si ju skontrolovalo.

1.2 Fermatov princíp pre odraz

Najprv si ukážeme platnosť princípu pre zrkadlo. Je tu využitý nielen zákon priamočiareho šírenia sa svetla v homogénnom prostredí, ale i zákon pre zrkadlo. Je daný problém : "Ktorou cestou sa môžeme dostať z bodu S do P za najkratší čas?" Je isté, že priamo z S do P! Ak však stanovíme podmienku, zasiahnutie zrkadla, odpoveď už nie je tak zrejmá.

Jeden spôsob je doraziť na zrkadlo kolmo, a potom do bodu P. Potom máme krátku dráhu SO a dlhú dráhu OP. Ak sa o málo posunieme doprava tak SO o niečo zväčšíme, ale OP zmenšíme, takže celková dráha a i čas na jej prekonanie sú kratšie.

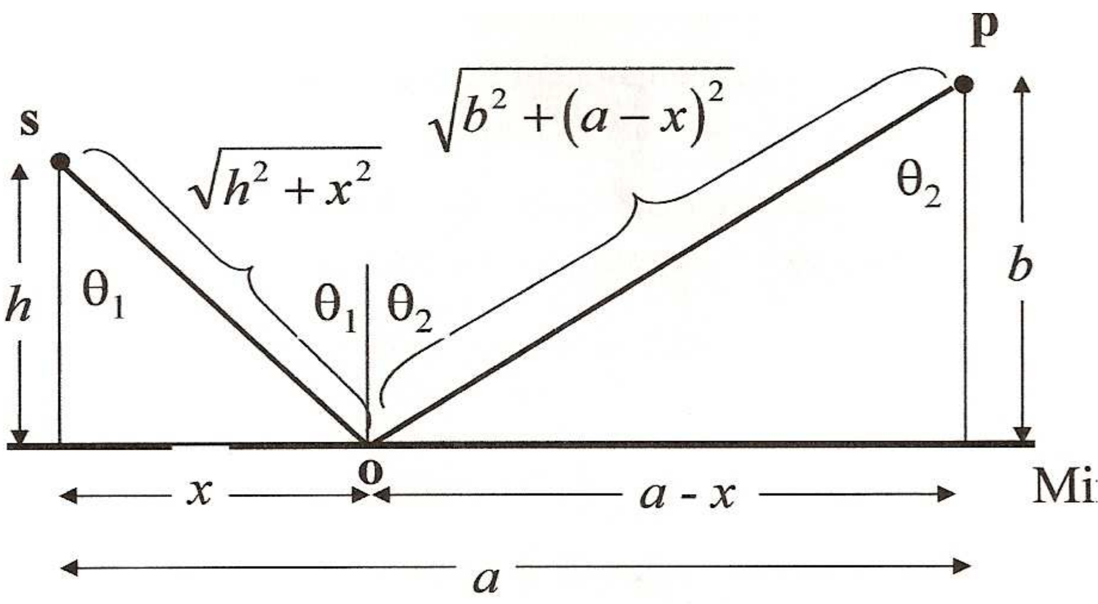
Hľadáme teda taký bod O na zrkadle, aby optická dráha svetla pri odraze na rozhraní z bodu S do bodu P cez bod O bola extrémna. Uhol Θ_1 je kladný a uhol Θ_2 je záporný . Výrok, že uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu, je teda ekvivalenitný výroku, že svetlo dopadá na zrkadlo tak, že do bodu P sa vracia za najmenší možný čas. Lúč putuje prostredím s indexom lomu n, pred a po odraze. Zložky optickej dráhy sú:

$$\begin{aligned} \overline{SO} &= \sqrt{h^2 + x^2} \\ \overline{OP} &= \sqrt{b^2 + (a-x)^2} \end{aligned}$$

A vyjadrenie pre úplnú optickú dĺžku dráhy ℓ je :

$$\ell = n(\overline{SO} + \overline{OP}) = n\left(\sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (a-x)^2}\right)$$

Keďže ℓ je funkcia premennej x, podľa Fermatovho princípu sa realizuje tá dráha pre ktorú je čas t minimálny. Teda pozíciu bodu O môžme nájsť deriváciou ℓ podľa premennej x a potom danú deriváciu položíme rovnú nule:



Obr. 3: Fermatov princíp pre odraz

$$\frac{d\ell}{dx} = n\left(\frac{2x}{2\sqrt{h^2+x^2}} + \frac{-2(a-x)}{2\sqrt{b^2+(a-x)^2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} = \frac{a-x}{\sqrt{b^2+(a-x)^2}}$$

ďalej platí:

$$\sin[\Theta_1] = \frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} \qquad \sin[-\Theta_2] = \frac{a-x}{\sqrt{b^2+(a-x)^2}}$$

$$\Rightarrow \sin[\Theta_1] = \sin[-\Theta_2]$$

$$\Rightarrow -\Theta_1 = \Theta_2$$

Odrazený lúč leží v rovine dopadu, postupuje na druhej strane od kolmice dopadu a zviera s ňou rovnako veľký uhol ako dopadajúci lúč. Ak meriame uhly Θ_1, Θ_2 od príslušných lúčov ku kolmici len do 90^o a počítame ich kladne v zmysle pohybu hodinových ručičiek tak je zvykom v geometrickej optike vyjadrovať zákon odrazu v uvedenom tvare. Je z neho zrejmé, že dopadajúci a odrazený lúč ležia na rôznych stranách kolmice dopadu.

1.3 Fermatov princíp pre lom

Opäť máme rovnaký problém : "Ktorou cestou sa môžeme dostať z bodu S do P za najkradší čas?" Zároveň vieme, že ($n_1 > n_2 \Rightarrow \Theta_1 < \Theta_2$) sa po dráhe SO pohybujeme pomalšie a po dráhe OP rýchlejšie. Môžme ísť opäť kolmo na rozhranie prostredí, keďže sa v prvom prostredí pohybujeme najpomalšie. Po hlbšej analýze opäť dospejeme k záveru, že konečným riešením problému je dráha SOP.

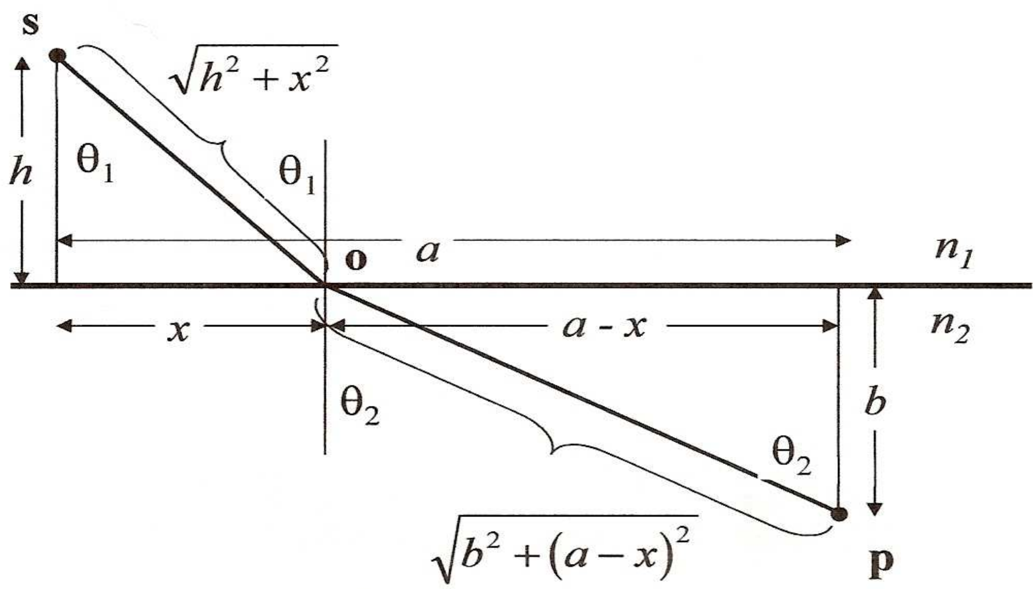
Optickú dráhu môžme vyjadriť v tvare:

$$\ell = n_1\overline{SO} + n_2\overline{OP}$$

svetlo sa šíry tak, aby jeho optická dráha bola extrémna. To vedie k požiadavke aby prvá derivácia optickej dráhy bola rovná nule. Ak však uvažujeme o minimálnom čase potrebnom na prejdenie vzdialenosti SOP dostaneme vzťah:

$$t(\Theta_1, \Theta_2) = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}$$

čo je funkcia dvoch premenných. V závislosti od polohy bodu O sa menia uhly dopadu a lomu. Pre najmenšie dráhy v oboch prostrediach platí:



Obr. 4: Fermatov princíp pre lom

$$\overline{SO} = s_1 = \sqrt{h^2 + x^2}$$
$$\overline{OP} = s_2 = \sqrt{b^2 + (a - x)^2}$$

Z toho je zrejmé, že:

$$
\begin{aligned}
t(\Theta_1,\Theta_2) &= \frac{\sqrt{h^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(a-x)^2}}{v_2} \\
\cos\Theta_1 &= \frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}} \quad \cos\Theta_2 = \frac{b}{\sqrt{b^2+(a-x)^2}} \\
t(\Theta_1,\Theta_2) &= \frac{h}{v_1\cos\Theta_1}+\frac{b}{v_2\cos\Theta_2}
\end{aligned}
$$

Potrebujeme nájsť extrém danej funkcie, takže budeme derivovať danú funkciu podľa premenej Θ_1 a Θ_2. Potom daný diferenciál položíme rovný nule.

$$
dt = \frac{\delta t}{\delta\Theta_1}d\Theta_1+\frac{\delta t}{\delta\Theta_2}d\Theta_2 = \frac{h\sin\Theta_1}{v_1\cos^2\Theta_1}d\Theta_1+\frac{b\sin\Theta_2}{v_2\cos^2\Theta_2}d\Theta_2=0
$$

$$
\frac{d\Theta_2}{d\Theta_1} = -\frac{v_2 h}{v_1 b}\frac{\sin\Theta_1}{\sin\Theta_2}\left(\frac{\cos\Theta_2}{\cos\Theta_1}\right)^2
$$

Ďalej platí a=konštanta, keďže derivácia konštanty je rovná nule tak:

$$
\begin{aligned}
a &= h\tan\Theta_1+b\tan\Theta_2 \\
da &= h\frac{1}{\cos^2\Theta_1}d\Theta_1+b\frac{1}{\cos^2\Theta_2}d\Theta_2=0
\end{aligned}
$$

$$
\frac{d\Theta_2}{d\Theta_1} = -\frac{h}{b}\left(\frac{\cos\Theta_2}{\cos\Theta_1}\right)^2
$$

takže:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Theta_2}{d\Theta_1} &= \frac{d\Theta_2}{d\Theta_1} \\
-\frac{v_2 h}{v_1 b}\frac{\sin\Theta_1}{\sin\Theta_2}\left(\frac{\cos\Theta_2}{\cos\Theta_1}\right)^2 &= -\frac{h}{b}\left(\frac{\cos\Theta_2}{\cos\Theta_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sin\Theta_1}{\sin\Theta_2}=\frac{v_1}{v_2}
\end{aligned}
$$

keďže platí $v_1=\frac{c}{n_1} \quad v_2=\frac{c}{n_2}$, tak po úprave dostaneme Snellov zákon:

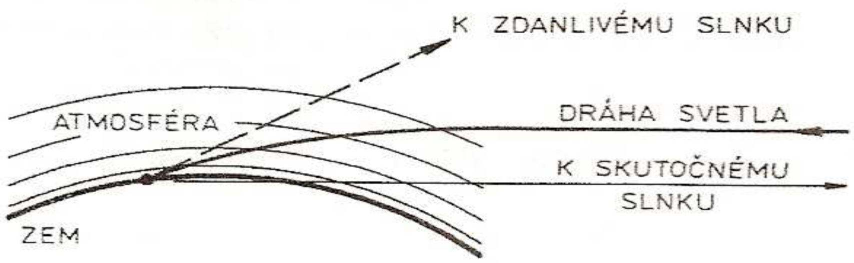
$$
n_1\sin\Theta_1 = n_2\sin\Theta_2
$$

1.4 Použitie Fermatovho princípu

Jedným z javov na ktorý sa aplikuje Fermatov princíp je zrkadlenie. Tento jav nastáva kvôli tomu, že vzduch tesne nad cestou je veľmi horúci, ale vyššie je chladnejší. Horúci vzduch sa viac rozpína ako studený, je redší a rýchlosť svetla je v ňom menej spomalená. Dá sa povedať, že svetlo miesto toho, aby sa rozhodlo priletieť po priamej ceste, ide po dráhe s najmenším časom, po ktorej ide do oblasti, kde na chvíľu letí rýchlejšie, aby ušetrilo čas. Takže môže ísť po krivke.

Obr. 5: Fatamorgána

Ďalším zaujímavým javom je skutočnosť, že keď Slnko vidíme zapadať, je vlastne už pod horizontom. Zemská atmosféra je riedka hore a hustá dole. Svetlo letí vo vzduchu pomalšie ako vo vákuu, preto sa slnečné svetlo môže do bodu S za horizontom dostať rýchlejšie, keď miesto toho, aby išlo len po priamke, vyhne sa hustým oblastiam, kde ide pomalšie a len potom cez ne prejde pod strmším uhlom. Keď sa zdá, že zapadá za horizont, v skutočnosti je už dosť pod horizontom.



Obr. 6: Pri horizonte sa Slnko zdá byť o 1/2 stupňa vyššie ako je skutočne

LITERATURA:

Dionyz Ilkovič - Fyzika II.

Feyman, Leighton - Feymmanove prednášky z fyziky 2

Web -
a) www(???) Chapter 9 Optical Imaging
b) www(???) Lom:Fermatov princip