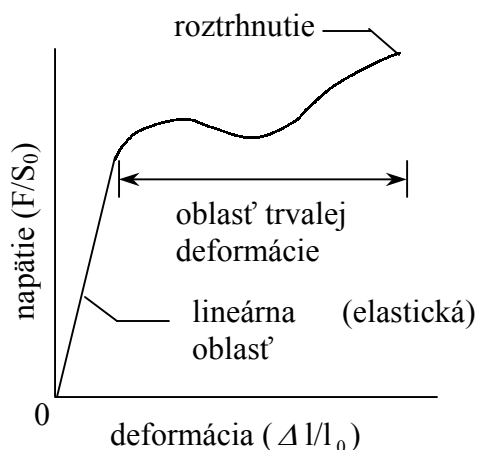


VYŠETROVANIE PRUŽNEJ DEFORMÁCIE

RNDr. J. Kovár, RNDr. B. Trpišová, Ph.D., Doc. RNDr. D. Vajda, CSc.

Teoretický úvod:

Medzi hmotnými elementami (atómami alebo iónmi kryštalickej mriežky) pôsobia príťažlivé a odpudivé sily, ktoré sú iba pri určitej vzdialenosti r_0 častíc v rovnováhe. Pri zväčšovaní vzájomnej vzdialenosti častíc (ťah) prevládnu sily príťažlivé, pri znižovaní tejto vzdialenosti (tlak) prevládnu sily odpudivé. Ak teda chceme nejaké teleso deformovať, musíme pôsobiť vonkajšou silou proti príťažlivým resp. odpudivým silám existujúcim medzi stavebnými časticami kryštálovej mriežky.



Obr. 1

Vzťah medzi účinkujúcimi silami a deformáciou, ktorú vyvolávajú, je pre štandardnú tuhú látku, v tomto prípade oceľ, znázornený na obr. 1. Ako ukazuje obrázok, v oblasti malých deformácií je tento vzťah lineárny a vyjadruje ho Hookov zákon, ktorý reprezentuje rovnica (1) uvedená nižšie. V tejto oblasti deformácií platí, že keď prestane pôsobiť deformujúca sila, deformovaná látka nadobudne pôvodný tvar. Ak budeme zväčšovať deformujúcu silu nad rámec lineárnej oblasti, bude už dochádzať k trvalej deformácii, pričom závislosť veľkosti deformujúcej sily od veľkosti deformácie sa už nedá vyjadriť jednoduchou funkciou, akou je napr. Hookov zákon. Pri určitej hodnote deformujúcej sily dôjde k roztrhnutiu materiálu.

V tejto úlohe sa budeme zaoberať deformáciami, pre ktoré vzťah medzi deformujúcou silou a deformáciou je lineárny, t.j. pre ktoré platí Hookov zákon. Jeho znenie je: Deformácia pružných telies je úmerná účinkujúcim silám a obrátene [viď. vzťahy (1) a (10)]. Prevrátená hodnota konštanty úmernosti vystupujúca v Hookovom zákone sa nazýva Youngov modul pružnosti. Ak deformujúca sila pôsobí kolmo na povrch telesa, vyvoláva deformáciu ťahom alebo tlakom a modul vystupujúci v Hookovom zákone je modul pružnosti v ťahu (označíme ho E). Ak deformujúca sila leží v rovine povrchu telesa alebo je jeho dotyčnicou vyvoláva deformáciu šmykom a príslušný modul je modul pružnosti v šmyku (označíme ho G). Takéto deformácie (ťahom, šmykom) nazývame jednoduché a možno ich využiť na experimentálne stanovenie príslušných modulov E a G . V ďalšom rozoberieme metódy na určovanie modulov E a G , ktoré sú založené na jednoduchých i zložitejších typoch deformácií.

I. MERANIE MODULU PRUŽNOSTI V ŤAHU.

Charakteristika veličiny:

Modul pružnosti v ťahu E je materiálová konštanta vyjadrujúca elastické vlastnosti látok. Závisí od druhu materiálu a od teploty. Tak napr. pre oceľ má hodnotu 210 GPa, pre hliník 60 GPa, pre meď 80 GPa, pre iridium 530 GPa a pod. Od teploty závisí tak, že s rastúcou teplotou hodnota E klesá. Preto je potrebné udávať aj teplotu, pri ktorej bola príslušná hodnota materiálovej konštanty nameraná.

Metódy merania:

V ďalšom uvedieme a rozoberieme dve metódy určovania modulu pružnosti v ťahu. Prvá sa vzťahuje na meranie modulu pružnosti v ťahu z predĺženia tenkého drôtu upevneného na jednom

konci. Túto metódu možno použiť pre merania pomocou vlákien, tenších drôtov alebo pásov, prútov. V tomto prípade teda podrobíme meranú vzorku deformácii ťahom. Pri druhej metóde sa ako vzorky použijú hrubšie tyče, ktoré sa podrobia deformácii ohybom. Pri oboch metódach použijeme Hookov zákon pre deformáciu ťahom, ktorý je uvedený v nasledujúcej časti.

A. MERANIE MODULU PRUŽNOSTI V ŤAHU Z PREDĹŽENIA TYČE (DRÔTU)

Teoretický úvod:

Uvažujme tyč (drôt) dĺžky l_0 a prierezu S_0 , ktorá je na jednom konci upevnená a na druhom konci je napínaná silou F v smere svojej osi (obr. 2). Pod napätím pôsobiacim v pričnom reze tyče rozumieme podiel sily F a prierezu tyče S_0 , kolmého na smer sily F , t.j. $\sigma = F / S_0$. Účinkom napätia sa tyč predĺži na dĺžku l , t.j. jej dĺžka sa zmení o hodnotu $\Delta l = l - l_0$. Pretože táto hodnota je závislá od pôvodnej dĺžky tyče, zavádzame pre ďalší popis pomerovú (relatívnu) veličinu vzťahom $\varepsilon = \Delta l / l_0$ a nazývame ju relatívne predĺženie. Relatívne predĺženie je bezrozmerné číslo.

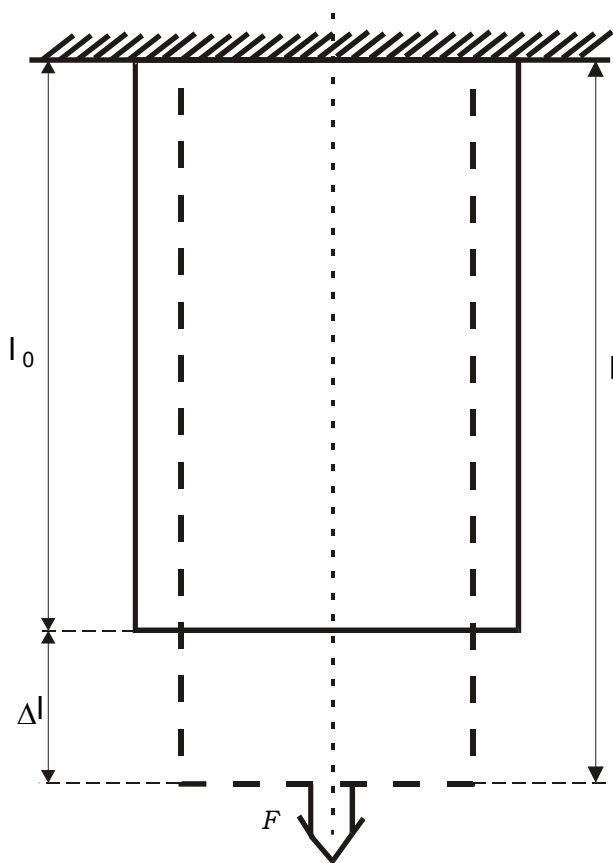
Pri pružných deformáciách relatívne predĺženie ε je priamo úmerné mechanickému napätiu σ (Hookov zákon), v ktorom prevrátená hodnota konštanty úmernosti predstavuje modul pružnosti v ťahu E . Matematické vyjadrenie Hookovho zákona je

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_0} \quad \text{alebo} \quad \sigma = E \varepsilon \quad (1)$$

Z Hookovho zákona je zrejmé, že modul pružnosti v ťahu E má rovnaký fyzikálny rozmer ako napätie, t.j. $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ a predstavuje také napätie, pri ktorom by absolútne predĺženie Δl bolo rovné pôvodnej dĺžke l_0 , alebo pri ktorom by relatívne predĺženie bolo rovné jednej (za predpokladu, že by taká deformácia vôbec bola možná). Zo vzťahov (1) dostaneme pre E

$$E = \frac{l_0}{\Delta l} \frac{F}{S_0} \quad \text{alebo} \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (2)$$

Stačí už teraz zvoliť vhodnú metódu na meranie predĺženia Δl , pretože ostatné veličiny vystupujúce vo vzťahu (2) sú bežne merateľné. Na obr. 3 je schematicky zobrazené usporiadanie experimentu umožňujúce zmerať



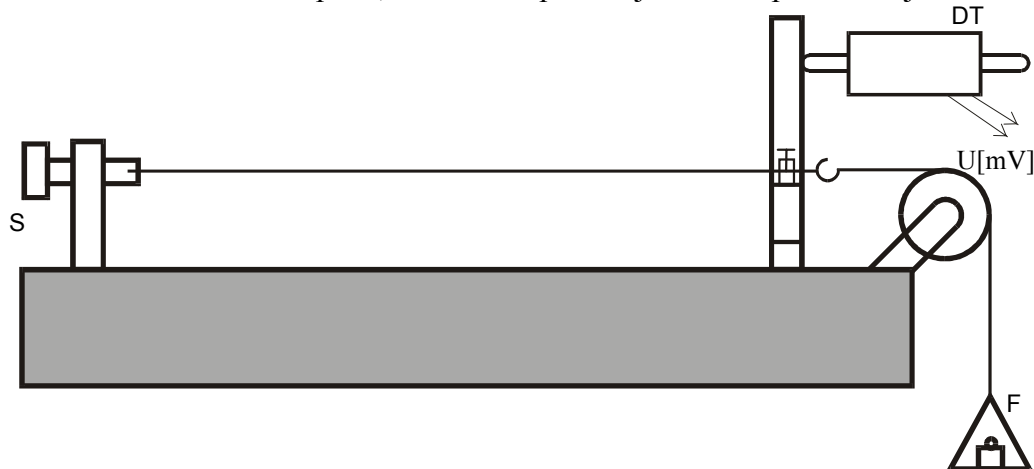
Obr. 2

predĺženie Δl .

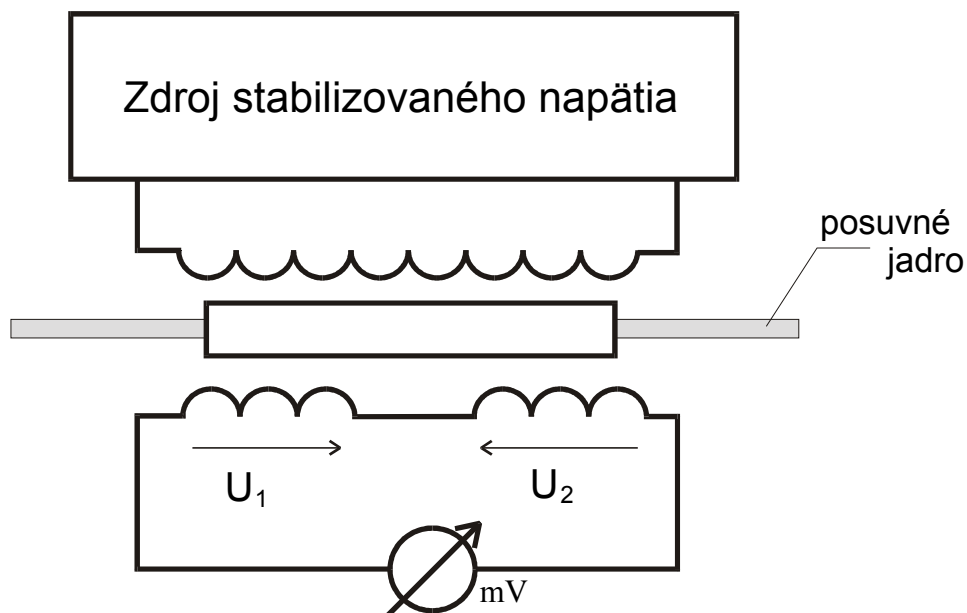
Popis zariadenia:

Pre stanovenie zmeny dĺžky Δl použijeme tzv. diferenciálny transformátor (na obr. 3 označený DT). U diferenciálneho transformátora je možné využiť pre meranie dĺžky závislosť výstupného napätia U od polohy posuvného jadra transformátora. Primárne vinutie je napájané striedavým prúdom zo stabilizovaného zdroja (obr. 4). Dve rovnaké sekundárne vinutia sú zapojené

proti sebe, takže ak jadro je uložené symetricky, výstupné napätie U je rovné nule. Ak sa však zmení poloha jadra, zmenia sa amplitúdy napätia oboch sekundárnych vinutí a na výstupe transformátora máme striedavé napätie, ktorého amplitúda je úmerná posunutiu jadra.



Obr. 3



Obr. 4

Meranie dĺžky alebo jej zmeny sa takto prevádza na meranie napätia. Príslušnú dĺžku, resp. jej zmenu, zistíme z prevodovej krivky $\Delta l = f(U)$. Túto krivku získame nasledovne: Pri nulovej záťaži priložíme zľava ku transformátoru mikrometrickú skrutku. Pomocou nej (a nie pomocou závaží) posúvame jadro transformátora, takže na jeho výstupe môžeme odčítavať hodnoty napätia. Im príslušné hodnoty posunutia odčítavame z mikrometra mikrometrickej skrutky. Posun mikrometra mikrometrickej skrutky teda okalibrujeme v hodnotách napätia.

Úlohy:

1. Meraním predĺženia drôtu pri jeho napínaní určiť modul pružnosti v ťahu pre dva rôzne materiály.
2. Stanoviť chybu výsledku na základe parciálnych príspevkov meraných veličín.

Postup merania a spracovanie výsledkov:

1. Dĺžku drôtu l_0 meriame jedenkrát, chybu $\bar{\delta}_{l_0}$ stanovíme odhadom.
2. Priemer drôtu meriame 10-krát, určíme jeho priemernú hodnotu $\bar{d}$ a strednú kvadratickú chybu $\bar{\delta}_d$.
3. Pomocou skrutky S (obr. 3) napneme drôt tak, aby pri základnom zaťažení ukazoval milivoltmeter nulové napätie.
4. Zmeriame teplotu miestnosti.
5. Pre 10 rôznych zaťažení drôtu meriame odpovedajúce napätie na výstupe diferenciálneho transformátora.
6. Pomocou mikrometrickej skrutky k daným hodnotám napätia zistíme príslušné predĺženie Δl . Namerané hodnoty zapisujeme do tabuľky, napr. podľa vzoru Tab. I.

Tab. I

Č. m.	m [g]	U [mV]	Δl [mm]	$k_i = \frac{\Delta l}{m} \left[\frac{m}{kg} \right]$	$\Delta^2 = (k_i - \bar{k})^2 \left[\frac{m^2}{kg^2} \right]$

7. Zostrojíme kalibračnú krivku $\Delta l = f(U)$ a graf závislosti Δl od F resp. Δl od m .
8. Zmeriame opäť teplotu miestnosti.
9. Pre každé meranie (zaťaženie) vypočítame koeficient $k = \frac{\Delta l}{m}$, určíme jeho priemernú hodnotu $\bar{k}$ a aj strednú kvadratickú chybu $\bar{\delta}_k$.
10. Z priemernej hodnoty priemeru drôtu $\bar{d}$ vypočítame plochu prierezu drôtu $\bar{S}$, aj jej chybu podľa vzťahu $\bar{\delta}_S = \left(2\bar{S}/\bar{d} \right) \cdot \bar{\delta}_d$.
11. Dosadením hodnôt $\bar{k}$, $\bar{l}_0$, $\bar{S}$ do vzťahu (2) získame rovnicu $\bar{E} = \frac{1}{\bar{k}} \frac{\bar{l}_0}{\bar{S}} g$, podľa ktorej vypočítame príslušný modul.
12. Na základe parciálnych príspevkov meraných veličín vypočítame chybu výsledku podľa vzťahu

$$(\bar{\delta}_E)^2 = \bar{E}^2 \left[\left(\frac{\bar{\delta}_k}{\bar{k}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}_{l_0}}{\bar{l}_0} \right)^2 + \left(2 \frac{\bar{\delta}_S}{\bar{S}} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

13. Výsledok merania uvádzame v tvare $E = \bar{E} \pm \bar{\delta}_E$.

Kontrolné otázky:

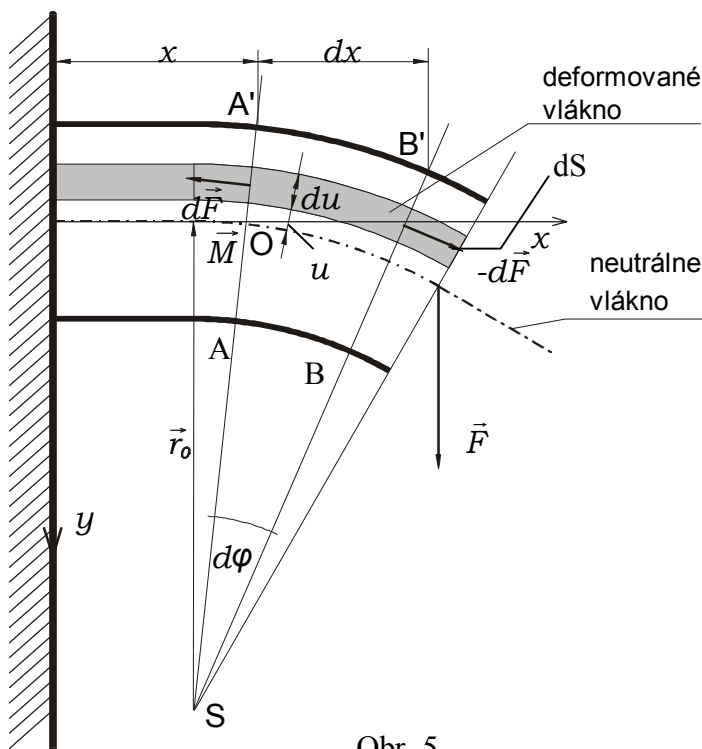
1. Vysvetlite obsah Hookovho zákona.
2. Definujte relatívne predĺženie a mechanické napätie pre daný typ deformácie.
3. Posúďte, či sa jedná o metódu priamu alebo nepriamu.
4. Aký je fyzikálny význam modulu pružnosti v ťahu?

B. MERANIE MODULU PRUŽNOSTI V ŤAHU Z PRIEHYBU TYČE

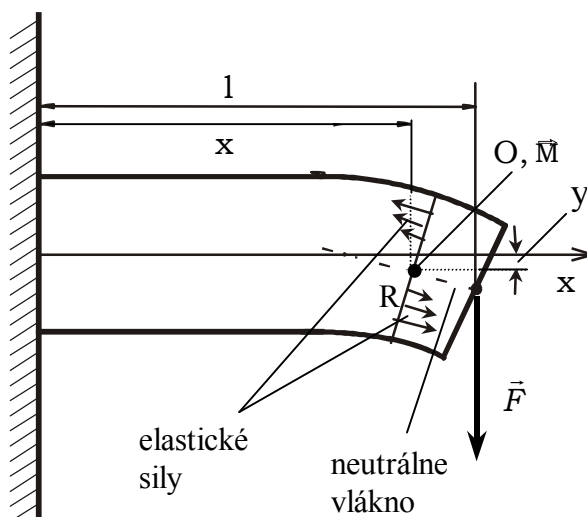
Teoretický úvod:

Touto metódou sa modul pružnosti v ťahu E určuje na základe merania priehybu tyče, ktorý vzniká zaťažením tyče závažím o hmotnosti m , t.j. deformácie ohybom. Deformácia ohybom je zložitejšou formou deformácie ťahom (tlakom). Uvažujme rovnorodú tyč, ktorej priečný prierez je rovnaký po celej jej dĺžke. Tyč je na jednom konci upevnená a na druhom konci zaťažená silou $\vec{F}$ (obr. 5 a obr. 6). Pod účinkom sily $\vec{F}$ sa tyč na voľnom konci ohýba. Prehnutie tyče vplyvom vlastnej tiaže bude veľmi malé a preto ho môžeme zanedbať. V ohnutej tyči bude tzv. neutrálne vlákno, t.j. vlákno, ktorého dĺžka je rovnaká ako dĺžka nedeformovanej tyče. Vlákna nad

neutrálnym vláknom sa pri ohybe ťahom



Obr. 5



Obr. 6

predĺžia, vlákna pod neutrálnym vláknom sa v dôsledku tlaku skrátiť.

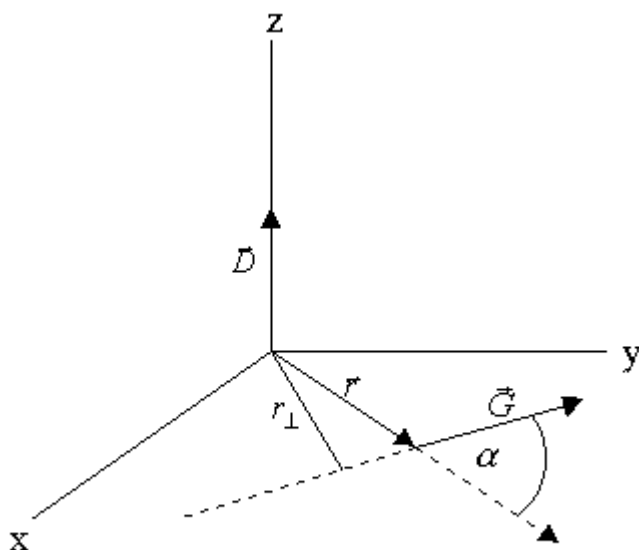
Závislosť ohybu konca tyče od ohybovej sily stanovíme na základe rozboru podmienky statickej rovnováhy sústavy. V stave statickej rovnováhy musí

byť výsledný moment síl pôsobiacich na ktorúkoľvek časť tyče rovný nule. Analyzujeme koncový úsek tyče dĺžky $(l-x)$ (obr. 6). Nech os O je os kolmá na rovinu obrázku, ležiaca v rovine rezu tyče označeného na obr. 6 písmenom R , a pretínajúca neutrálne vlákno. V stave rovnováhy výsledný moment síl vzhľadom na os O je nulový, takže platí

$$M - F(l-x) = 0, \quad (4)$$

kde $\vec{M}$ je moment elastických síl pôsobiacich kolmo na rovinu nášho vybraného rezu, ako je naznačené na obr. 6, a $F(l-x)$ je veľkosť momentu sily $\vec{F}$ vzhľadom na os O . Moment elastických síl $\vec{M}$ má smer kolmo na rovinu obrázku a von z obrázku, moment sily $\vec{F}$ má smer kolmo na rovinu obrázku a do obrázku.

Poznámka: Smery oboch momentov síl vyplývajú z definície momentu sily ako vektorového súčinu $\vec{r} \times \vec{G}$, kde $\vec{r}$ je polohový vektor pôsobiska sily $\vec{G}$ vzhľadom na nejaký vzťažný bod O (obr. 7). $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{G}$ je vektor, ktorý je kolmý na rovinu určenú vektormi $\vec{r}$ a $\vec{G}$ (rovina xy na



Obr. 7

obr.7) a je orientovaný na tú stranu od tejto roviny, z ktorej sa rotácia $\vec{r}$ do smeru $\vec{G}$ pozdĺž kratšieho z uhlov zvieraných vektormi $\vec{r}$ a $\vec{G}$ javí proti chodu hodinových ručičiek. Veľkosť $\vec{D}$ je $rG\sin\alpha = r_{\perp}G$, kde $r_{\perp}$ je kolmá vzdialenosť bodu O od priamky, v ktorej leží sila $\vec{G}$.

Pre rozbor momentu $\vec{M}$ skúmame deformáciu dĺžkového elementu tyče medzi rezmi AA' a BB' (obr. 5). Element tyče rozdelíme na pozdĺžne vlákna s pričným prierezom dS . V dôsledku ohybu tyče sú vlákna zakrivené. Stred krivosti všetkých vlákien je ten istý a na obr. 5 je označený písmenom S. Rezy AA' a BB' sú na vlákna

kolmé. Ak je r_0 polomer krivosti neutrálneho vlákna, je polomer krivosti ľubovoľného vlákna $r = r_0 + u$, kde u je súradnica vlákna vzhľadom na vlákno neutrálne (obr. 5). Tvar neutrálneho vlákna je popísaný funkciou $y = f(x)$, kde x, y sú pozdĺžnou a priečnou súradnicou jeho ľubovoľného bodu. Potom v malom úseku tyče prislúchajúcemu stredovému uhlu $d\varphi$ má neutrálne vlákno dĺžku $r_0 d\varphi$. Vlákno, ktoré je vo vzdialenosti u nad neutrálnym vláknom, bude mať v úseku prislúchajúcemu stredovému uhlu $d\varphi$ dĺžku $(r_0 + u)d\varphi$. Jeho relatívne predĺženie bude

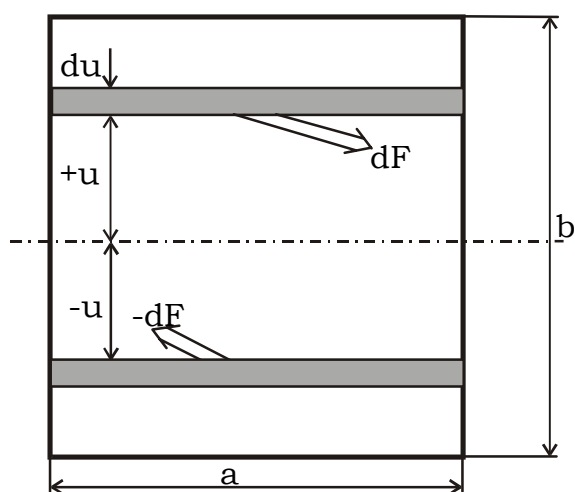
$$\varepsilon = \frac{(r_0 + u)d\varphi - r_0 d\varphi}{r_0 d\varphi} = \frac{u d\varphi}{r_0 d\varphi} = \frac{u}{r_0}$$

a napätie vo vlákne bude

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{u}{r_0}.$$

Pomocou tohoto napätia môžeme silu pôsobiacu na plošku dS reprezentujúcu priečny prierez vlákna, ktorý má veľkosť adu , vo vzdialenosti u od neutrálneho vlákna, vyjadriť vzťahom

$$dF = \sigma adu = \frac{Ea}{r_0} u du.$$



Obr. 8

Vo vzdialenosti $-u$ bude pôsobiť na rovnakú plošku rovnaká sila, ale opačného smeru. Situácia je zobrazená na obr. 8, ktorý predstavuje priečny prierez tyčou.

Každá elementárna sila dF produkuje elementárny moment sily $dM = udF$. Pri tomto vyjadrení dM sme použili definíciu vektorového súčinu uvedenú vyššie, pričom sme zobrazi do úvahy, že všetky dvojice síl dF a $-dF$ pôsobiace v každom kolmom reze tyče sú na rez kolmé, pretože majú smer dotyčníc k ohnutým vláknom. Z uvedených vzťahov je zrejmé, že veľkosť elementárnych momentov síl dM závisí od vzdialenosti u od osi rezu. Preto veľkosť výsledného otáčavého momentu vyprodukovaného elementárnymi silami

v ľubovoľnom kolmom reze tyčou dostaneme sčítaním všetkých elementárnych momentov síl pre všetky u , t.j. integráciou

$$M = \int_{-b/2}^{+b/2} u dF = \frac{E}{r_0} \int_{-b/2}^{+b/2} a u^2 du = \frac{E}{r_0} I,$$

$$\text{kde} \quad I = \int_{-b/2}^{+b/2} a u^2 du = \frac{1}{12} a b^3 \quad (5)$$

je plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče vzhľadom na os otáčania O . Ako vyplýva z (5), M je rovnaký pre ľubovoľný kolmý rez tyčou. Môžeme poznamenať, že podmienka statickej rovnováhy (4) platí pre ľubovoľný, a teda nie nutne kolmý, rez tyčou. V prípade ľubovoľného rezu by sa vyššie uvedený vzťah pre M podľa pravidiel vektorového súčinu vynásobil sínusom uhla, ktorý by zvierali sily dF s rovinou rezu.

Nech sa ohnutím tyče zníži neutrálne vlákno o y vo vzdialenosti x od upevneného konca ako je naznačené na obr. 6. Polomer krivosti r_0 (vid'. obr. 5) tohto ohnutia môžeme obecné vyjadriť pomocou y v tvare

$$r_0 = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''},$$

Kde y' a y'' je prvá a druhá derivácia funkcie y . V prípade malého ohnutia môžeme y'^2 zanedbať voči jednej, pretože pre náš tvar prehnutia (na obr. 5 a obr. 6 je prehnutie trochu zveličené) je aj derivácia y , t.j. veľkosť smernice dotýčnice k funkcii $y(x)$ (t.j. k neutrálnemu vláknu) v mieste x malá. Pre polomer krivosti r_0 prehnutia tyče dostaneme potom vzťah $r_0 = 1/y''$, ktorý dosadením do rovnice (4) dáva diferenciálnu rovnicu

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F}{EI} (l - x).$$

Dvojitou integráciou tejto rovnice a s uvažovaním, že v mieste upevnenia je $y = 0$ a tak isto aj $y' = 0$ (podľa obr. 5 a obr. 6 je dotýčnica k funkcii $y(x)$ v mieste $x = 0$ rovnobežná s osou x , a teda jej smernica je rovná nule), upravíme riešenie rovnice na tvar

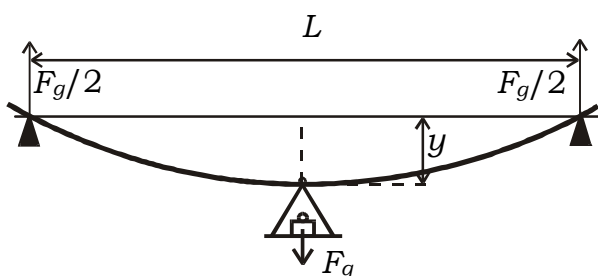
$$y = \frac{F}{EI} \left(\frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Ohnutie tyče na konci zaťaženom silou F je reprezentované súradnicou $y(x) = y_l$ neutrálneho vlákna a jeho vyjadrenie ako funkciu veličín F , E , I a l získame, keď do predchádzajúcej rovnosti dosadíme $x = l$, t.j.

$$y_l = \frac{F l^3}{3EI}. \quad (6)$$

Prakticky modul pružnosti v ťahu meriame na tyči, ktorá je na oboch koncoch podopretá a v prostriedku zaťažená silou F . Potom účinok sily F v strede je ten istý, aký by mali sily $F/2$, keby

pôsobili na koncoch tyče v prípade, že by tyč bola upevnená v prostriedku (obr. 9). Ak dosadíme do vzťahu (6) $l = L/2$, $F = mg/2$ a



$I = \frac{1}{12} ab^3$, dostaneme po úprave výsledný vzťah pre modul pružnosti

$$E = \frac{gL^3}{4ab^3} \frac{m}{y}, \quad (7)$$

Obr. 9

kde L je vzdialenosť podpier. Zo vzťahu (7) vyplýva, že priehyb y je priamo úmerný

hmotnosti záťaže m .

Úlohy:

1. Zmerať modul pružnosti v ťahu pre dva rôzne materiály (oceľ, meď).
2. Stanoviť chybu, s ktorou je daná veličina meraná.

Postup merania a spracovanie výsledkov:

1. Vzdialenosť medzi podperami L zmeriame jedenkrát, chybu δ_L stanovíme odhadom.
2. Pričné rozmery tyče a a b zmeriame mikrometrom, každý aspoň 10-krát na rôznych miestach tyče. Hodnoty zapisujeme do tabuľky II.

Tabuľka II.

Č. m.	a_i [mm]	$(a_i - \bar{a})$ [mm]	$(a_i - \bar{a})^2$ [mm ²]	b_i [mm]	$(b_i - \bar{b})$ [mm]	$(b_i - \bar{b})^2$ [mm ²]

3. Z nameraných hodnôt a_i , b_i určíme ich aritmetické priemery $\bar{a}$, $\bar{b}$ a stanovíme ich stredné kvadratické chyby $\bar{\delta}_a$, $\bar{\delta}_b$.
4. Odchýlkomer umiestnime do stredu medzi obe podpory a nastavíme ho tak, aby pri základnom zaťažení tyče danom záťažou misky, na ktorú kladieme závažia, ukazoval nulu.
5. Zmeriame teplotu miestnosti.
6. Pre 10 rôznych zaťažení tyče, odstupňovaných napr. po 50 g, meriame odchýlkomerom odpovedajúci priehyb y . Hodnoty zapisujeme do tabuľky III.

Tabuľka III.

Č.m.	m [g]	y [mm]	$k_i = y/m$ [m/kg]	$(k_i - \bar{k})^2$ [m ² /kg ²]

7. Zmeriame opäť teplotu miestnosti.
8. Linearitu závislosti priehybu od zaťaženia overíme tak, že zostrojíme graf závislosti y od m .
9. Pre každé zaťaženie určíme konštantu $k_i = y_i/m_i$. Z vypočítaných hodnôt k_i určíme aritmetický priemer $\bar{k}$ a jeho strednú kvadratickú chybu $\bar{\delta}_k$.
10. Získané aritmetické priemery $\bar{a}$, $\bar{b}$ dosadíme do vzťahu (7) namiesto a a b a pomer m/y v (7) nahradíme konštantou $1/\bar{k}$.
11. Určíme výslednú chybu meranej veličiny E z parciálnych príspevkov chýb priamo meraných veličín a a b a chyby vypočítanej konštanty k podľa vzťahu

$$\bar{\delta}_E^2 = \bar{E}^2 \left[\left(3 \frac{\bar{\delta}_L}{L} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}_a}{a} \right)^2 + \left(3 \frac{\bar{\delta}_b}{b} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}_k}{k} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

12. Výsledok merania uvádzame v tvare $E = \bar{E} \pm \bar{\delta}_E$.

Kontrolné otázky:

1. Vysvetlite Hookov zákon.
2. Čo je to relatívne predĺženie a mechanické napätie?
3. Aký je fyzikálny význam modulu pružnosti v ťahu?
4. Prečo je možné merať modul pružnosti v ťahu z priehybu tyče? Je to metóda priama, či nepriama?
5. Čo je to neutrálne vlákno?

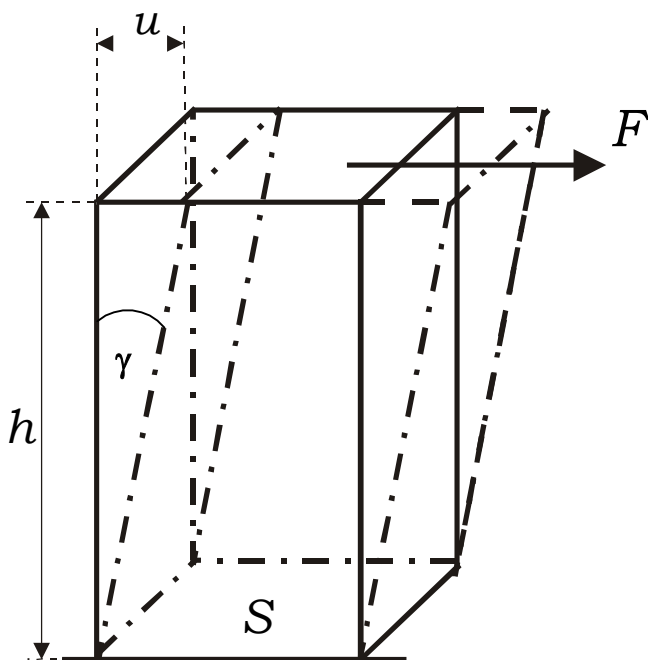
II. MERANIE MODULU PRUŽNOSTI V ŠMYKU.

Teoretický úvod:

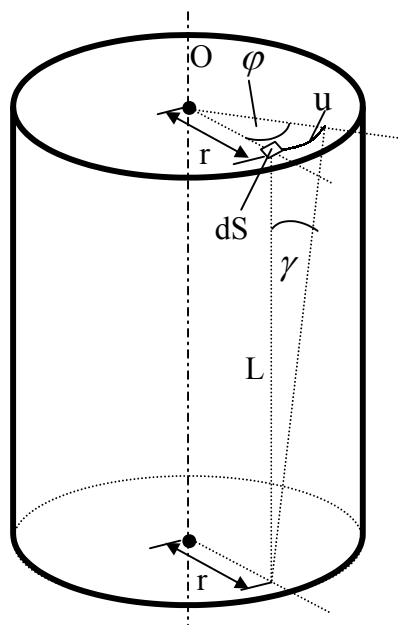
Modul pružnosti v šmyku (niekedy ho nazývame modul torzie), môžeme určiť aj z konkretizácie Hookovho zákona pre deformáciu v šmyku

$$\frac{u}{h} = \frac{1}{G} \frac{F}{S}, \quad (9)$$

kde význam jednotlivých členov najlepšie ukáže obr. 10. Podiel $F/S = \tau$ predstavuje tangenciálne napätie, u – posunutie hornej základne kvádra voči dolnej základni, $u/h = \tan \gamma \approx \gamma$ predstavuje



Obr. 10



Obr. 11

relatívne posunutie hornej základne voči dolnej. Hookov zákon je možné pre tento prípad napísať v tvare

$$\tau = G\gamma, \quad (10)$$

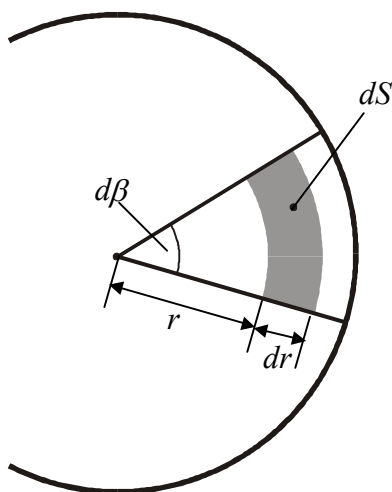
kde G je modul pružnosti v šmyku. Zo vzťahov (9), (10) vidieť, že má rozmer napätia ($\text{N/m}^2 = \text{Pa}$) a predstavuje také napätie, pri ktorom by absolútne posunutie u bolo rovné výške hranola h , alebo pri ktorom by relatívne posunutie $\tan\gamma = 1$ (teda, aby uhol $\gamma = 45^\circ$). Priame využitie Hookovho zákona na určenie modulu pružnosti v šmyku je pomerne málo praktické a príslušná priama metóda aj málo presná.

Preto sa modul pružnosti v šmyku najčastejšie určuje z torzie tyčí alebo drôtov.

Torzná deformácia je zložitejším prípadom deformácie šmykovej. Jednotlivé priechne vrstvy telesa sa krútením vzájomne natačajú. Každá časť vzorky je namáhaná iba šmykom a pritom, i keď šmyk v každej časti vzorky je pomerne malý (leží hlboko pod mierou úmernosti deformácie a napätia), výsledný uhol stočenia vzorky môže byť veľký a teda dobre merateľný.

Uvažujme tyč v tvare valca o dĺžke L a priemere $d = 2r_0$, ktorá je na jednom konci upevnená (dolný koniec). Na druhý koniec tyče (horný koniec) pôsobíme silou, ktorej krútiaci moment vyvolá deformáciu v šmyku každého pozdĺžneho vlákna dĺžky L , ktorého prierez je dS (obr. 11). Vyberme jedno pozdĺžne vlákno, ktoré je v kolmej vzdialenosti r od torznej osi O . Táto os je predstavovaná neutrálnym vláknom, t.j. vláknom, ktoré sa pri krútení nedeformuje. Pri natočení voľného konca tyče (horného) vplyvom krútiaceho momentu o uhol φ sa posunie voľný koniec vybraného vlákna (horný) po kružnici polomeru r o úsek $u = r\varphi$. Tomuto posunutiu zodpovedá deformačný uhol γ (obr. 10 a obr. 11), pre ktorý platí $\tan\gamma = \gamma = u/L = r\varphi/L$. Podľa Hookovho zákon na horný koniec sledovaného vlákna pôsobí tangenciálne napätie $\tau = dF/dS = G\gamma$, kde dF je elementárna sila účinkujúca v rovine hornej podstavy tyče v mieste plôšky dS v smere kolmom na kolmú spojnicu plôšky dS (prierezu vlákna) s neutrálnym vláknom (t.j. dF má smer dotyčnice ku kružnici s polomerom r , po ktorej sa posunie pri deformácii horný koniec sledovaného vlákna). Tejto sile zodpovedá vzhľadom na torznú os moment sily $dM = r dF = r G \gamma dS = r G (r\varphi/L) dS = (G/L) r^2 \varphi dS$. Ako je zrejmé, elementárny moment sily dM závisí od vzdialenosti r od torznej osi, je teda rôzny pre rôzne r . Preto, aby sme vyjadrili celkový moment torzných síl pôsobiacich v hornej podstave tyče, musíme sčítať všetky elementárne príspevky dM od všetkých pozdĺžnych vlákien s elementárnymi prierezmi dS pre celú podstavu voľného konca tyče, čo je vyjadrené nasledovnou integráciou

$$M = \int_{(S)} dM = \frac{G\varphi}{L} \int_{(S)} r^2 dS = \frac{GI}{L} \varphi, \quad (11)$$



Obr. 12

kde $I = \int_{(S)} r^2 dS$ je plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče

vzhľadom na torznú os. Pre tyč s kruhovým prierezom postupujeme pri výpočte I tak, že plochu kruhu rozdelíme na elementy (obr. 12), ktoré v polárnych súradniciach nadobúdajú vyjadrenie

$$dS = r \cdot d\beta \cdot dr$$

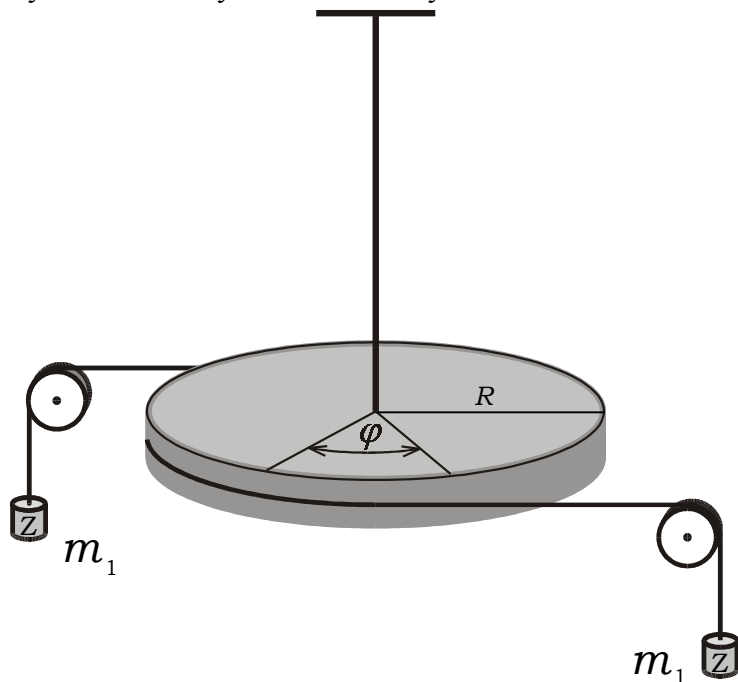
a vypočítame príslušný integrál

$$I = \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{d/2} r^3 dr = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (12)$$

Zo vzťahu (11) vidíme, že torzný uhol φ je priamo úmerný torznému momentu M . Konštantu

$$M_0 = \frac{GI}{L} \quad (13)$$

nazývame *direkčným momentom tyče*.



Obr. 13

V nasledujúcom výklade uvedieme dve metódy merania modulu pružnosti v šmyku – statickú a dynamickú.

A. *STATICKÁ METÓDA MERANIA MODULU PRUŽNOSTI V ŠMYKU.*

Statická metóda merania modulu pružnosti v šmyku využíva torziu tenkej tyče alebo drôtu, vyrobených z materiálu, ktorého modul pružnosti v šmyku chceme určiť. V našom prípade má skúmaný materiál tvar hrubšieho drôtu kruhového prierezu. Drôt je zavesený tak, že jeho horný koniec je upevnený v držiaku a k jeho dolnému koncu je pripevnený kotúč

s uhlovou stupnicou (obr. 13). Na obode kotúča pôsobia sily kolmé na torznú os, vyvolané cez kladky tiahou závaží o hmotnostiach m_1 a m_2 . Výsledný torzný moment týchto síl je $(m_1 + m_2)gR$, kde R je polomer kotúča. Aby nevznikla sila vychýľujúca os kotúča volíme závažia tak, aby $m_1 = m_2$. Uvedený moment sily dosadíme do vzťahu (11) spolu so vzťahom (12) a pre modul pružnosti G dostaneme vzťah

$$G = \frac{32gRL}{\pi d^4} \cdot \frac{m_1 + m_2}{\varphi} \quad (14)$$

Úlohy:

1. Zmerať modul pružnosti v šmyku pre mosadz.
2. Stanoviť chybu merania pre daný modul.

Postup merania a spracovanie výsledkov:

1. Po upevnení drôtu do príslušného zariadenia určíme priamym meraním hodnoty veličín R , L , d . R určíme tak, že raz odmeriame posuvným meradlom priemer kotúča a výsledok vydělíme dvoma. Chybu $\bar{\delta}_R$ stanovíme odhadom. Dĺžku L drôtu odmeriame raz pásmovým meradlom a chybu $\bar{\delta}_L$ tiež odhadneme. Priemer drôtu zmeriame mikrometrom 10-krát, vypočítame aritmetický priemer $\bar{d}$ a strednú kvadratickú chybu $\bar{\delta}_d$.
2. Zmeriame teplotu miestnosti.
3. Drôt zaťažujeme prikľadaním závaží na misky tak, že na každú miskú budeme postupne pridávať po 50 g. Pre každé zaťaženie odmeriame uhol skrútenia kotúča φ (v radiánoch).

4. Opäť zmeriame teplotu miestnosti.
5. Hodnoty zapisujeme do tabuľky IV.

Tabuľka IV.

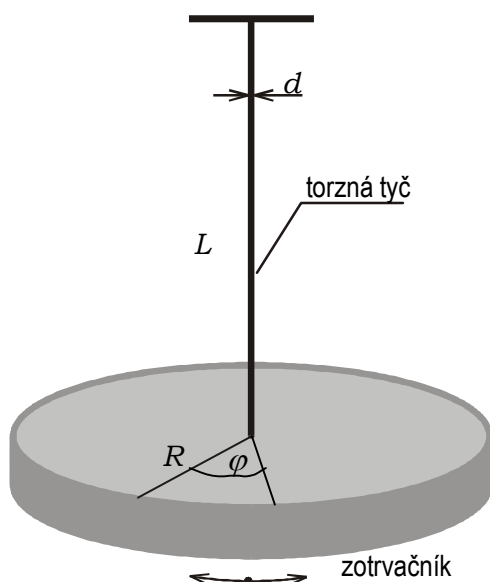
Č. m.	$m_1 + m_2$ [kg]	φ [rad]	$k_i = \frac{\varphi}{m_1 + m_2}$ [1/kg]	$(k_i - \bar{k})^2$ [1/kg ²]

6. Overíme linearitu torznej deformácie tak, že namerané hodnoty φ vynesieme do grafu $\varphi = f(m)$. Pre každé zaťaženie určíme konštantu $k = \frac{\varphi}{m}$, jej aritmetický priemer $\bar{k}$ a k nej príslušnú strednú kvadratickú chybu $\bar{\delta}_k$. Namerané výsledky dosadíme do vzťahu (14), v ktorom pomer $(m_1 + m_2)/\varphi$ nahradíme konštantou $1/\bar{k}$.
7. Určíme chybu merania veličiny G vyplývajúcu z parciálnych chýb jednotlivých priamo meraných veličín resp. chyby vypočítanej konštanty k . Danú chybu stanovíme zo vzťahu

$$\bar{\delta}_G^2 = \bar{G}^2 \left[\left(\frac{\bar{\delta}_R}{\bar{R}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}_L}{\bar{L}} \right)^2 + \left(4 \frac{\bar{\delta}_d}{\bar{d}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}_k}{\bar{k}} \right)^2 \right]. \quad (15)$$

B. DYNAMICKÁ METÓDA MERANIA MODULU PRUŽNOSTI V ŠMYKU S POUŽITÍM TORZNÉHO KYVADLA.

Experiment usporiadajme podobne ako v predchádzajúcej metóde, len namiesto uhlomerného



Obr. 14

kotúča upevníme na dolný koniec drôtu teleso, plniace úlohu zotrvačníka, ktorého moment zotrvačnosti I_T voči pozdĺžnej osi drôtu je mnohonásobne väčší ako moment zotrvačnosti drôtu samotného. Takýmto telesom je napr. valec s veľkou plochou podstavy a malou výškou. Tak dostaneme dynamickú kmitavú sústavu, ktorá je schopná konať kmity vo vodorovnej rovine – torzné kmity – okolo osi totožnej s osou drôtu – torznej osi. Takúto sústavu voláme torzné kyvadlo (obr. 14). Torzné kyvadlo sa rozkmitá, keď vychýlime (skrútením) valec z rovnovážnej polohy o uhol φ a pustíme ho. V dôsledku vychýlenia valca z rovnovážnej polohy vznikajú v dolnej podstave drôtu torzné sily. Aby sme vyjadrili veľkosť momentu týchto síl, môžeme použiť rovnakú úvahu ako v teoretickom úvode. Tento moment je teda daný rovnicami (11) a (12).

Vzťah medzi momentom torzných síl $\vec{M}$ a výchylkou valca φ získame z pohybovej rovnice pre teleso rotujúce alebo kmitajúce okolo pevnej osi

$$\vec{M} = J\ddot{\varepsilon},$$

kde J je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania a $\vec{\varepsilon}$ je vektor uhlového zrýchlenia. V našom prípade oba vektory $\vec{\varepsilon}$ a $\vec{M}$ ležia v torznej osi, takže vyššie uvedenú rovnicu môžeme písať pre ich veľkosti, t.j.

$$M = -I_T \varepsilon,$$

kde I_T je moment zotrvačnosti valca vzhľadom na os otáčania, a $\varepsilon = d^2\varphi / dt^2$ je veľkosť uhlového zrýchlenia. Znamienko mínus v poslednej rovnosti znamená, že moment torzných síl vždy účinkuje tak, aby sa redukovala výchylka φ , t.j. aby zotrvačnik mal vždy tendenciu vracať sa do svojej rovnovážnej polohy.

Poznámka: Podrobné vysvetlenie znamienka mínus vystupujúceho v hore uvedenej rovnici možno nájsť v Doplnkoch A a B v úlohe „Určenie momentu zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla“. V spomenutej úlohe sa takisto študuje periodický kmitavý pohyb popísaný tou istou rovnicou, len s tým rozdielom, že M je moment tiažovej sily a nie moment torzných síl a namiesto I_T vystupuje v pohybovej rovnici moment zotrvačnosti vzhľadom na os neprechádzajúcu ťažiskom I .

Po dosadení za M zo vzťahu (11) a úprave dostane pohybová rovnica pre uhol výchylky torzného kyvadla φ z jeho rovnovážnej polohy tvar

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{GI}{LI_T}\varphi = 0. \quad (16)$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice je harmonická funkcia tvaru

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \psi),$$

kde φ_0 je maximálna výchylka kyvadla z jeho rovnovážnej polohy (amplitúda) a ψ je výchylka kyvadla z rovnovážnej polohy v čase $t=0$, t.j. na začiatku pohybu. Obyčajne sa pre $t=0$ volí $\psi=0$. O tom, že posledný horeuvedený vzťah je naozaj riešením rovnice (16) sa môžeme presvedčiť jeho priamym dosadením do rovnice (16). Dostaneme, že tento vzťah spĺňa rovnicu (16) ak pre uhlovú frekvenciu kmitavého pohybu platí $\omega = \sqrt{GI / LI_T}$. Keďže ω súvisí s periódou vzťahom $\omega = 2\pi / T$, môžeme modul pružnosti v šmyku vyjadriť pomocou týchto dvoch vzťahov ako

$$G = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{LI_T}{I}, \quad (17)$$

kde za I dosadíme vzťah (12) a za I_T moment zotrvačnosti zaveseného telesa (ak je telesom valec, potom $I_T = mR^2 / 2$, kde m je hmotnosť valca a R jeho polomer). Oba momenty zotrvačnosti I aj I_T sú určené vzhľadom na os drôtu (torznú os).

Úlohy:

1. Zmerať modul pružnosti v torzii pre rôzne materiály.
2. Stanoviť náhodnú chybu výsledku.

Postup merania a spracovanie výsledkov:

1. Zostavíme torzné kyvadlo a určíme priamym meraním hodnoty jeho parametrov (dĺžku tyče, priečne rozmery tyče, rozmery a hmotnosť zaveseného telesa). Dané parametre meriame viackrát (aspoň 10-krát) stanovíme ich priemerné hodnoty a príslušné náhodné chyby (stredné kvadratické chyby aritmetického priemeru).
2. Zmeriame teplotu miestnosti.

3. Kyvadlo slabo rozkmitáme a postupnou metódou určíme periódu kmitov vrátane chyby merania. Meriame 100 periód, pričom každých 10 periód zapisujeme medzičas do tabuľky V. Prvých päť medzičasov zaznamenáme do druhého stĺpca tabuľky V, druhých päť medzičasov do jej štvrtého stĺpca.

Tabuľka V.

Číslo merania i	$t_i = i \times 10 T$ [s]	Číslo merania ($i+5$)	$t_{i+5} = (i+5) \times 10 T$ [s]	$t_{50}^i = t_{i+5} - t_i$ [s]	$T_i = \frac{t_{50}^i}{50}$ [s]	$(T - T_i)^2$ [s ²]

T v tabuľke V je aritmetický priemer z piatich hodnôt periód $T_1, T_2, \dots, T_5$ vypočítaných v jej šiestom stĺpci. Pomocou týchto piatich hodnôt vypočítame strednú kvadratickú chybu periódy $\bar{\delta}_T$.

4. Opäť zmeriame teplotu miestnosti.
5. Dosadením hodnôt priamo meraných veličín do vzťahu (17) vypočítame hodnotu meranej veličiny G . Určíme chybu merania (výsledku) s uvažovaním parciálnych príspevkov chýb jednotlivých priamo meraných veličín podľa vzťahu

$$\bar{\delta}_G^2 = \bar{G}^2 \left[\left(2 \frac{\bar{\delta}_T}{\bar{T}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}_L}{\bar{L}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\delta}_m}{\bar{m}} \right)^2 + \left(2 \frac{\bar{\delta}_R}{\bar{R}} \right)^2 + \left(4 \frac{\bar{\delta}_d}{\bar{d}} \right)^2 \right]. \quad (18)$$

6. Výsledok uvedieme v tvare $G = \bar{G} \pm \bar{\delta}_G$.

Kontrolné otázky:

1. Napíšte Hookov zákon pre deformáciu v šmyku.
2. Napíšte vzťahy pre relatívne posunutie a mechanické napätie pri deformácii šmykom.
3. Objasnite fyzikálny význam modulu pružnosti v šmyku.
4. Prečo je možné merať modul pružnosti v šmyku z torzie drôtu (tyče)?
5. Čo je neutrálne vlákno a kadiaľ prechádza?
6. Popíšte metódu postupných meraní.
7. Odvoďte vzťahy pre výpočet chyby výsledku (15), (18).

Doplnená a upravená úloha zo skrípt:

Doc. RNDr. Drahoslav Vajda, CSc., Doc. Ing. Július Štelina, CSc., RNDr. Jaroslav Kovár, Ing. Ctibor Musil, CSc., RNDr. Ivan Bellan, Doc. Ing. Igor Jamnický, CSc., „Návody k laboratorným cvičeniam z fyziky“, vydala Žilinská univerzita vo vydavateľstve EDIS, 2. nezmenené vydanie, rok 2003